Quantenmechanik I

FSU Jena - SS 08

Serie 09 - Lösungen

Stilianos Louca

23. Juni 2008

Korollar 1

Für zeitunabhängigen Hamilton Operator $\mathcal{H}_s$ im Schrödingerbild, gilt für den Hamilton Operator $\mathcal{H}_h$ im Heisenbergbild: $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_h =: \mathcal{H}$.
Beweis: Da $\mathcal{H}_s$ Zeitunabhängig ist, ist der Propagationsoperator $U(t, t_0)$ gegeben durch

$$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathcal{H}_s} \ , \ U^\dagger(t,t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathcal{H}_s}$$

Als Potenzreihen von $\mathcal{H}_s$ kommutieren $U(t,t_0), U^\dagger(t,t_0)$ natürlich mit $\mathcal{H}_s$, so dass sich ergibt

$$\mathcal{H}_h = U^\dagger(t,t_0)\mathcal{H}_s U(t,t_0) = \mathcal{H}_s \underbrace{U^\dagger(t,t_0)U(t,t_0)}_{\text{Id}} = \mathcal{H}_s \quad \square$$

Korollar 2

Für beliebigen Operator $A(t)$ und beliebigem Hamilton Operator $\mathcal{H}(t)$ gilt:

$$[A_h(t), \mathcal{H}_h(t)] = [A_s(t), \mathcal{H}_s(t)]_h$$

Beweis: Beginnen mit der Definition des Kommutators und schreiben

$$[A_h, \mathcal{H}_h(t)] = \left[U^\dagger(t,t_0)A_s(t)U(t,t_0), U^\dagger(t,t_0)\mathcal{H}_s(t)U(t,t_0)\right]$$

$$= U^\dagger(t,t_0)A_s(t)\underbrace{U(t,t_0)U^\dagger(t,t_0)}_{\text{Id}}\mathcal{H}_s(t)U(t,t_0) - U^\dagger(t,t_0)\mathcal{H}_s(t)\underbrace{U(t,t_0)U^\dagger(t,t_0)}_{\text{Id}}A_s(t)U(t,t_0)$$

$$= U^\dagger A_s(t)\mathcal{H}_s(t)U(t,t_0) - U^\dagger(t,t_0)\mathcal{H}_s(t)A_s(t)U(t,t_0) = U^\dagger(t,t_0)\left(A_s(t)\mathcal{H}_s(t) - \mathcal{H}_s(t)A_s(t)\right)U(t,t_0)$$

$$= U^\dagger(t,t_0)\left[A_s(t), \mathcal{H}_s(t)\right]U(t,t_0) = [A_s(t), \mathcal{H}_s(t)]_h \quad \square$$

Aufgabe 22

Annahme: $B > 0$

a) Der Hamilton Operator $\mathcal{H}$ ist im Schrödingerbild gegeben durch

$$\mathcal{H}_s = -\gamma B S_s^z$$

mit dem Gyromagnetischen Verhältnis γ und dem z-Spinnoperator S^z im Schrödingerbild. Im Schrödingerbild bzw. Heisenbergbild ist $\mathbf{S}$ gegeben durch

$$\mathbf{S}_s = S_s^i \vec{e}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma^i \vec{e}_i \ , \ \partial_t \mathbf{S}_s = 0 \quad , \quad \mathbf{S}_h = U^\dagger(t,t_0)\mathbf{S}_s U(t,t_0)$$

Die Differentialgleichung der zeitlichen Entwicklung von $\mathbf{S}_h$ ist gegeben durch

$$i\hbar\partial_t \mathbf{S}_h(t) = \underbrace{[\mathbf{S}_h(t), \mathcal{H}_h]}_{\substack{[\mathbf{S}_s,\mathcal{H}_s]_h \\ \text{nach Korollar 2}}} + i\hbar \underbrace{\partial_t \mathbf{S}_s}_{0} = -\gamma B \cdot \underbrace{\left[S_s^i, S_s^z\right]_h}_{(i\hbar\varepsilon_{izl}S_s^l)_h} \cdot \vec{e}_i = -i\gamma\hbar B \varepsilon_{izl} S_h^l \cdot \vec{e}_l = i\gamma\hbar B \cdot \begin{pmatrix} S_h^y \\ -S_h^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \partial_t S_h^x(t) = \gamma B S_h^y(t) \ \ , \ \ \partial_t S_h^y(t) = -\gamma B S_h^x(t) \ \ , \ \ \partial_t S_h^z(t) = 0 \ \rightarrow \ S_h^z = \text{const}$$

Durch Differenzieren der 1. DGL erhalten wir die DGL

$$\partial_t^2 S_h^x(t) = \gamma B \partial_t S_h^y = -\gamma^2 B^2 S_h^x$$

deren allgemeine Lösung sich bekanntlich ergibt als

$$S_h^x(t) = Ae^{i\gamma Bt} + Be^{-i\gamma Bt} \ \rightarrow \ S_h^y(t) = \frac{1}{\gamma B}\partial_t S_h^x(t) = iAe^{i\gamma Bt} - iBe^{i\gamma Bt}$$

wobei A, B erstmal frei wählbare Operatoren sind. Wir fordern jedoch die Übereinstimmung von $\mathbf{S}_h$ mit $\mathbf{S}_s$ zum Zeitpunkt $t = 0$, so dass sich ergibt:

$$\left.\begin{aligned} S_h^x(0) &\overset{!}{=} S_s^x \ \rightarrow \ A + B = S_s^x \\ S_h^y(0) &\overset{!}{=} S_s^y \ \rightarrow \ iA - iB = S_s^y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ A = \frac{S_s^x - iS_s^y}{2} \ , \ B = \frac{S_s^x + iS_s^y}{2}$$

$$S_h^z(0) \overset{!}{=} S_s^z$$

das heißt

$$S_h^x(t) = \cos(\gamma Bt) \cdot S_s^x + \sin(\gamma Bt) \cdot S_s^y$$

$$S_h^y(t) = -\sin(\gamma Bt) \cdot S_s^x + \cos(\gamma Bt) \cdot S_s^y$$

$$S_h^z(t) = S_s^z$$

b) Beginnen mit den 25% der Teilchen mit $\langle S_h^z(0)\rangle = \langle S_s^z\rangle = \frac{\hbar}{2}$. Da die einzigen möglichen Spin-Eigenwerte allgemein $\pm\frac{\hbar}{2}$ sind, ergibt sich der Erwartungswert des entsprechenden Zustands $|\psi\rangle$ durch die Wahrscheinlichkeiten $\mathcal{P}_+, \mathcal{P}_-$ gemäß

$$\langle S_s^z\rangle = \frac{\hbar}{2}\mathcal{P}_+ - \frac{\hbar}{2}\mathcal{P}_- \ , \ \mathcal{P}_\pm = |\langle \pm_z \, |\psi\rangle|^2$$

Zu sehen ist: Damit $\langle S_s^z\rangle = \frac{\hbar}{2}$ ist, muss $\mathcal{P}_+ = 1$ und $\mathcal{P}_- = 0$ sein, das heißt der Zustand dieser Teilchen ist gegeben durch

$$|\psi_{25}\rangle = e^{i\varphi} \cdot |+\rangle_z \ , \ \varphi \in \mathbb{R}$$

O.B.d.A können wir $\varphi = 0$ setzen, das heißt $|\psi_{25}\rangle = |+\rangle$. Durch die bekannten Identitäten

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z \pm |-\rangle_z\right) \quad , \quad |\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z \pm i\,|-\rangle_z\right)$$

können wir diesen Zustand $|\psi\rangle$ umschreiben als Linearkombination der $|\pm\rangle_x$ bzw. $|\pm\rangle_y$, gemäß

$$|\psi_{25}\rangle = |+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_y + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_y$$

(direktes Einsetzen bestätigt die Korrektheit der Darstellung). Somit ergibt sich der Erwartungswert $\left\langle S_s^i \right\rangle$ für $|\psi_{25}\rangle$ zum Zeitpunkt $t = 0$ als

$$\left\langle S_s^i \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot |\langle +_i \, |\psi_{25}\rangle|^2 - \frac{\hbar}{2} \cdot |\langle -_i \, |\psi_{25}\rangle|^2$$

$$\langle S_s^x \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 - \frac{\hbar}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = 0 \quad , \quad \langle S_s^y \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 - \frac{\hbar}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = 0$$

Unter Verwendung der Ergebnisse in (a) ergibt sich somit für $|\psi_{25}\rangle \, , \; t \geq 0$:

$$\langle S_h^x(t) \rangle_{25} = \langle \cos(\gamma B t) \cdot S_s^x + \sin(\gamma B t) \cdot S_s^y \rangle = \cos(\gamma B t) \underbrace{\langle S_s^x \rangle}_{0} + \sin(\gamma B t) \underbrace{\langle S_s^y \rangle}_{0} = 0$$

$$\langle S_h^y(t) \rangle_{25} = \langle -\sin(\gamma B t) \cdot S_s^x + \cos(\gamma B t) \cdot S_s^y \rangle = -\sin(\gamma B t) \underbrace{\langle S_s^x \rangle}_{0} + \cos(\gamma B t) \underbrace{\langle S_s^y \rangle}_{0} = 0$$

$$\langle S_h^z(t) \rangle_{25} = \langle S_s^z \rangle = \frac{\hbar}{2}$$

Betrachten nun die 75% der Teilchen mit $\langle S_s^y \rangle = \dfrac{\hbar}{2}$. Analog zu vorhin, können wir schließen dass deren Zustand gegeben ist durch

$$|\psi_{75}\rangle = e^{i\varphi} \cdot |+\rangle_y \;\; , \text{ o.B.d.A } \varphi = 0$$

Analog zu vorhin entwickeln wir mit Hilfe der Identitäten

$$|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \, |+\rangle_z + \frac{i}{\sqrt{2}} \, |-\rangle_z \quad , \quad |\pm\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_x \pm |-\rangle_x \right)$$

den Zustand $|\psi_{75}\rangle$ bzgl. der $|\pm\rangle_x$ und $|\pm\rangle_z$, gemäß

$$|\psi_{75}\rangle = |+\rangle_y = \frac{(1+i)}{2} \, |+\rangle_x + \frac{(1-i)}{2} \, |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \, |+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} \, |-\rangle_z$$

woraus wir direkt die Erwartungswerte $\left\langle S_s^i \right\rangle$ ablesen kann:

$$\langle S_s^x \rangle = \frac{\hbar}{2} \left| \frac{1+i}{2} \right|^2 - \frac{\hbar}{2} \left| \frac{1-i}{2} \right|^2 = 0 \quad , \quad \langle S_s^z \rangle = \frac{\hbar}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 - \frac{\hbar}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = 0$$

Unter Verwendung der Ergebnisse in (a) ergibt sich somit für $|\psi_{75}\rangle \, , \; t \geq 0$:

$$\langle S_h^x(t) \rangle_{75} = \langle \cos(\gamma B t) \cdot S_s^x + \sin(\gamma B t) \cdot S_s^y \rangle = \cos(\gamma B t) \underbrace{\langle S_s^x \rangle}_{0} + \sin(\gamma B t) \underbrace{\langle S_s^y \rangle}_{\frac{\hbar}{2}} = \sin(\gamma B t) \cdot \frac{\hbar}{2}$$

$$\langle S_h^y(t) \rangle_{75} = \langle -\sin(\gamma B t) \cdot S_s^x + \cos(\gamma B t) \cdot S_s^y \rangle = -\sin(\gamma B t) \underbrace{\langle S_s^x \rangle}_{0} + \cos(\gamma B t) \underbrace{\langle S_s^y \rangle}_{\frac{\hbar}{2}} = \cos(\gamma B t) \cdot \frac{\hbar}{2}$$

$$\langle S_h^z(t) \rangle_{75} = \langle S_s^z \rangle = 0$$

Berechnung der Netto-Erwartungswerte

Durch obige Ergebnisse ist zu erkennen: Die Mengen der Teilchen mit Zustand $|\psi_{75}\rangle$ und der Teilchen mit Zustand $|\psi_{25}\rangle$ sind disjunkt, und somit zu einander komplementär. Somit ergibt sich der netto-Erwartungswert des Spin-Operators als die entsprechende *gewichtete Mittelung* der jeweiligen Erwartungswerte, gemäß

$$\langle S_h^x(t)\rangle = 0.25 \cdot \langle S_h^x(t)\rangle_{25} + 0.75 \cdot \langle S_h^x(t)\rangle_{75} = 0.25 \cdot 0 + 0.75 \cdot \sin(\gamma B t) \cdot \frac{\hbar}{2} = \frac{3\hbar}{8}\sin(\gamma B t)$$

$$\langle S_h^y(t)\rangle = 0.25 \cdot \langle S_h^y(t)\rangle_{25} + 0.75 \cdot \langle S_h^y(t)\rangle_{75} = 0.25 \cdot 0 + 0.75 \cdot \cos(\gamma B t) \cdot \frac{\hbar}{2} = \frac{3\hbar}{8}\cos(\gamma B t)$$

$$\langle S_h^z(t)\rangle = 0.25 \cdot \langle S_h^z(t)\rangle_{25} + 0.75 \cdot \langle S_h^z(t)\rangle_{75} = 0.25 \cdot \frac{\hbar}{2} + 0.75 \cdot 0 = \frac{\hbar}{8}$$

Aufgabe 23

Annahme: $\omega > 0$. Substituieren $\Omega := \sqrt{\omega}$.

a) Der Hamilton-Operator ist für den harmonischen Oszillator im Schrödingerbild gegeben durch

$$\mathcal{H}_s = \frac{P_s^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2}X_s^2$$

Da $\mathcal{H}_s$ zeitunabhängig ist, ist der Propagationsoperator $U(t, t_0)$ gegeben durch

$$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathcal{H}_s} \quad , \quad U^\dagger(t,t_0) = U^{-1}(t,t_0) = U(t_0,t) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathcal{H}_s}$$

Somit sind die Operatoren $X_H(t)$ und $P_H(t)$ im Heisenbergbild bzgl. der (zeitunabhängigen) Operatoren X_s, P_s im Schrödingerbild gegeben durch

$$X_H(t) = U^\dagger(t,t_0)X_sU(t,t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathcal{H}}X_se^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathcal{H}}$$

$$P_H(t) = U^\dagger(t,t_0)X_sU(t,t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathcal{H}}P_se^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathcal{H}}$$

Bemerke: Da $\mathcal{H}_s$ zeitunabhängig ist, ist nach Korollar 1 $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_h =: \mathcal{H}$.
Die Zeitentwicklungsgleichungen der beiden Operatoren erweisen sich under Berücksichtung von

$$[X_s, \mathcal{H}] = \frac{i\hbar}{m}P_s \quad , \quad [P_s,\mathcal{H}] = [P_s, V] \overset{\text{speziell}}{=} \frac{m\Omega^2}{2}[P_s, X_s^2] = \frac{m\Omega^2}{2}\{X_s[P_s,X_s] + [P_s,X_s]X_s\} = -im\Omega^2\hbar X_s$$

somit als:

$$i\hbar\partial_t X_H(t) = [X_H(t),\mathcal{H}] + i\hbar\underbrace{(\partial_t X_s)}_{0} = \left[U^\dagger(t,t_0)X_sU(t,t_0),\mathcal{H}\right] = U^\dagger(t,t_0)\left[X_sU(t,t_0),\mathcal{H}\right] + \underbrace{\left[U^\dagger(t,t_0),\mathcal{H}\right]}_{0}X_sU(t,t_0)$$

$$= U^\dagger(t,t_0)X_s\underbrace{[U(t,t_0),\mathcal{H}]}_{0} + U^\dagger(t,t_0)\underbrace{[X_s,\mathcal{H}]}_{\frac{i\hbar}{m}P_s}U(t,t_0) = \frac{i\hbar}{m}U^\dagger(t,t_0)P_sU(t,t_0) = \frac{i\hbar}{m}P_H(t)$$

$$\rightarrow \ \partial_t X_H = \frac{P_H}{m}$$

$$i\hbar\partial_t P_H(t) = [P_H(t),\mathcal{H}] + i\hbar\underbrace{(\partial_t P_s)}_{0} = \left[U^\dagger(t,t_0)P_sU(t,t_0),\mathcal{H}\right] = U^\dagger(t,t_0)\left[P_sU(t,t_0),\mathcal{H}\right] + \underbrace{\left[U^\dagger(t,t_0),\mathcal{H}\right]}_{0}P_sU(t,t_0)$$

$$= U^\dagger(t,t_0)P_s\underbrace{[U(t,t_0),\mathcal{H}]}_{0} + U^\dagger(t,t_0)\underbrace{[P_s,\mathcal{H}]}_{-im\Omega^2\hbar X_s}U(t,t_0) = -im\Omega^2\hbar U^\dagger(t,t_0)X_sU(t,t_0) = -m\Omega^2\hbar X_H(t)$$

$$\rightarrow \ \partial_t P_H = -m\Omega^2 X_H$$

Lösen diese beiden Differentialgleichungen (vgl. Hamilton-Jacobi Gleichungen) durch Differenzieren von $X_H(t)$:

$$\partial_t^2 X_H = \frac{\partial_t P_H}{m} = -\Omega^2 X_H$$

und erhalten durch den e-Ansatz die allgemeine Lösung

$$X_H(t) = A \cdot e^{i\Omega(t-t_0)} + B \cdot e^{-i\Omega(t-t_0)} \quad , \quad P_H(t) = m\partial_t X_H(t)$$

wobei A, B allgemeine (zeitunabhängige) lineare Operatoren sind. Durch die Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$X_H(t_0) = A + B \overset{!}{=} \underbrace{U^\dagger(t_0,t_0)}_{\text{Id}} X_s \underbrace{U(t_0,t_0)}_{\text{Id}} = X_s$$

$$\partial_t X_H(t_0) = i\Omega(A - B) \overset{!}{=} \frac{P_H(t_0)}{m} = \frac{1}{m} \underbrace{U^\dagger(t_0,t_0)}_{\text{Id}} P_s \underbrace{U(t_0,t_0)}_{\text{Id}} = \frac{P_s}{m}$$

$$\rightarrow \; A = \frac{P_s}{2i\Omega m} + \frac{X_s}{2} \; , \; B = \frac{X_s}{2} - \frac{P_s}{2i\Omega m}$$

wobei X_s, P_s genau die Impulsoperatoren am Zeitpunkt t_0 sind, also

$$\boxed{X_H(t) = \cos(\Omega(t-t_0)) \cdot X_s + \frac{1}{\Omega m}\sin(\Omega(t-t_0)) \cdot P_s}$$

und somit

$$\boxed{P_H(t) = -m\Omega \sin\left(\Omega(t-t_0)\right) \cdot X_s + \cos\left(\Omega(t-t_0)\right) \cdot P_s}$$

In Ortsdarstellung also:

$$X_H(t) = \cos(\Omega(t-t_0)) \cdot x + \frac{\hbar}{i\Omega m}\sin(\Omega(t-t_0)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

$$P_H(t) = -m\Omega \sin\left(\Omega(t-t_0)\right) \cdot x + \frac{\hbar}{i}\cos\left(\Omega(t-t_0)\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

b) Setzen wir $\psi_H = \psi_s(t_0)$ und $t_0 := 0$ so fallen per Konstruktion (durch die gestellten Anfangsbedingungen) der Operatoren X_H, P_H das Heisenbergbild und das Schrödingerbild für $t = 0$ zusammen. Schreiben also

$$\langle X_H(t)\rangle = \langle\psi_H|\, X_H(t)\, |\psi_H\rangle = \cos(\Omega t) \cdot \underbrace{\langle\psi_H|\, X_s\, |\psi_H\rangle}_{\langle\psi_s(0)|X_s|\psi_s(0)\rangle} + \frac{1}{\Omega m}\sin(\Omega t) \cdot \underbrace{\langle\psi_H|\, P_s\, |\psi_H\rangle}_{\langle\psi_s(0)|P_s|\psi_s(0)\rangle}$$

$$= \cos(\Omega t) \cdot \langle X_s\rangle_{t=0} + \frac{1}{\Omega m}\sin(\Omega t) \cdot \langle P_s\rangle_{t=0}$$

$$\langle P_H(t)\rangle = -m\Omega \sin\left(\Omega t\right) \cdot \underbrace{\langle\psi_H|\, X_s\, |\psi_H\rangle}_{\langle\psi_s(0)|X_s|\psi_s(0)\rangle} + \cos\left(\Omega t\right) \cdot \underbrace{\langle\psi_H|\, P_s\, |\psi_H\rangle}_{\langle\psi_s(0)|P_s|\psi_s(0)\rangle}$$

$$= -m\Omega \sin\left(\Omega t\right) \cdot \langle X_s\rangle_{t=0} + \cos\left(\Omega t\right) \cdot \langle P_s\rangle_{t=0}$$

wobei $\langle X_s\rangle_{t=0} \overset{\psi_H:\text{const}}{=} \langle X_s\rangle$ und $\langle P_s\rangle_{t=0} \overset{\psi_H:\text{const}}{=} \langle P_s\rangle$ genau die *Anfangserwartungswerte* sind.

c) Setzen auch hier o.B.d.A $t_0 := 0$. Unter Verwendung der Ergebnisse in Teil (a) schreiben wir:

- $$[X_H(t_2), X_H(t_1)] = \left[\cos(\Omega t_2)\cdot X_s + \frac{1}{\Omega m}\sin(\Omega t_2)\cdot P_s, \cos(\Omega t_1)\cdot X_s + \frac{1}{\Omega m}\sin(\Omega t_1)\cdot P_s\right]$$

  $$= \cos(\Omega t_2)\cos(\Omega t_1)\cdot \underbrace{[X_s, X_s]}_{0} + \frac{1}{\Omega^2 m^2}\sin(\Omega t_2)\sin(\Omega t_1)\cdot \underbrace{[P_s, P_s]}_{0}$$

  $$+ \frac{1}{\Omega m}\cos(\Omega t_2)\sin(\Omega t_1)\cdot \underbrace{[X_s, P_s]}_{i\hbar} + \frac{1}{\Omega m}\sin(\Omega t_2)\cos(\Omega t_1)\cdot \underbrace{[P_s, X_s]}_{-i\hbar}$$

  $$= \frac{i\hbar}{\Omega m}\cdot [\cos(\Omega t_2)\sin(\Omega t_1) - \sin(\Omega t_2)\cos(\Omega t_1)] = -\frac{i\hbar}{\Omega m}\sin(\Omega(t_2 - t_1))$$

- $$[P_H(t_2), P_H(t_1)] = [-m\Omega\sin(\Omega t_2)\cdot X_s + \cos(\Omega t_2)\cdot P_s, -m\Omega\sin(\Omega t_1)\cdot X_s + \cos(\Omega t_1)\cdot P_s]$$

  $$= -m^2\Omega^2\sin(\Omega t_2)\sin(\Omega t_1)\cdot \underbrace{[X_s, X_s]}_{0} + \cos(\Omega t_2)\cos(\Omega t_1)\cdot \underbrace{[P_s, P_s]}_{0}$$

  $$- m\Omega\cos(\Omega t_2)\sin(\Omega t_1)\cdot \underbrace{[P_s, X_s]}_{-i\hbar} - m\Omega\sin(\Omega t_2)\cos(\Omega t_1)\cdot \underbrace{[X_s, P_s]}_{i\hbar}$$

  $$= i\hbar m\Omega\cdot[\sin(\Omega t_1)\cos(\Omega t_2) - \cos(\Omega t_1)\sin(\Omega t_2)] = i\hbar m\Omega\sin(\Omega(t_1 - t_2))$$

- $$[X_H(t_2), P_H(t_1)] = \left[\cos(\Omega t_2)\cdot X_s + \frac{1}{\Omega m}\sin(\Omega t_2)\cdot P_s, -m\Omega\sin(\Omega t_1)\cdot X_s + \cos(\Omega t_1)\cdot P_s\right]$$

  $$= -m\Omega\cos(\Omega t_2)\sin(\Omega t_1)\cdot \underbrace{[X_s, X_s]}_{0} + \frac{1}{\Omega m}\sin(\Omega t_2)\cos(\Omega t_1)\cdot \underbrace{[P_s, P_s]}_{0}$$

  $$+ \cos(\Omega t_2)\cos(\Omega t_1)\cdot \underbrace{[X_s, P_s]}_{i\hbar} - \sin(\Omega t_2)\sin(\Omega t_1)\cdot \underbrace{[P_s, X_s]}_{-i\hbar}$$

  $$= i\hbar\cdot[\cos(\Omega t_2)\cos(\Omega t_1) + \sin(\Omega t_2)\sin(\Omega t_1)] = i\hbar\cos(\Omega(t_1 - t_2))$$

d) Sei o.B.d.A $t_0 = 0$. Unter Verwendung obiger Ergebnisse schreiben wir

$$V(X_H(t)) = \frac{m\Omega^2}{2}\left[\cos(\Omega t)X_s + \frac{1}{\Omega m}\sin(\Omega t)P_s\right]^2 = \frac{m\Omega^2}{2}\cos^2(\Omega t)X_s^2 + \frac{1}{2m}\sin^2(\Omega t)P_s^2 + \frac{\Omega}{2}\cos(\Omega t)\sin(\Omega t)\left(X_sP_s + P_sX_s\right)$$

$$\rightarrow \ \langle\nabla V(X_H(t))\rangle = \langle\partial_x V(X_H(t))\rangle = \left\langle m\Omega^2\cos^2(\Omega t)X_s + \Omega\cos(\Omega t)\sin(\Omega t)P_s\right\rangle$$

$$= m\Omega^2\cos^2(\Omega t)\langle X_s\rangle + \Omega\cos(\Omega t)\sin(\Omega t)\langle P_s\rangle$$

Andererseits ist

$$V\left(\langle X_H(t)\rangle\right) = \frac{m\Omega^2}{2}\left[\cos(\Omega t)\langle X_s\rangle + \frac{1}{\Omega m}\sin(\Omega t)\langle P_s\rangle\right]^2$$

$$= \frac{m\Omega^2}{2}\cos^2(\Omega t)\langle X_s\rangle^2 + \frac{1}{2m}\sin^2(\Omega t)\langle P_s\rangle^2 + \Omega\cos(\Omega t)\sin(\Omega t)\langle X_s\rangle\langle P_s\rangle$$

$$\rightarrow\ \nabla V\left(\langle X_H(t)\rangle\right) = \partial_{\langle X_s\rangle} V\left(\langle X_H(t)\rangle\right) = m\Omega^2\cos^2(\Omega t)\cos^2(\Omega t)\langle X_s\rangle + \Omega\cos(\Omega t)\sin(\Omega t)\langle P_s\rangle$$

Somit gilt

$$\langle\nabla V(X_H(t))\rangle = \nabla V\left(\langle X_H(t)\rangle\right)$$

was auch schon durch die bereits aufgestellten Bewegungsgleichungen für $X_H(t), P_H(t)$ zu erwarten war.