Quantenmechanik I

FSU Jena - SS 08

Serie 08 - Lösungen

Stilianos Louca

24. Juni 2008

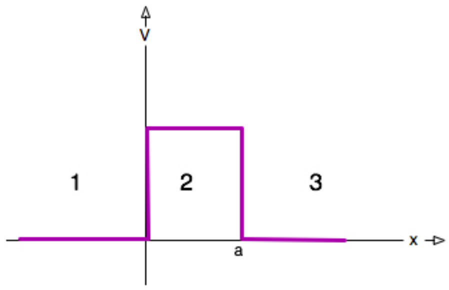
Aufgabe 20

Allgemeine Lösung

Betrachten die stationäre Schrödingergleichung

$$E\varphi(x) = \mathcal{H}\varphi(x) \ , \ \mathcal{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)$$

für die drei Bereiche, die wie folgt nummeriert seien:



Speziell seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_2$ die Lösungen der Schrödinger-Gleichung im jeweiligen Bereich:

$$(1) : E\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\varphi(x) \ \rightarrow \ \partial_x^2\varphi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) \ \rightarrow \ \varphi_1(x) = A_1e^{i\Omega x} + B_1e^{-i\Omega x} \ , \ \Omega = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$(2) : E\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi(x) + V_0\varphi(x) \ \rightarrow \ \partial_x^2\varphi(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\varphi(x) \ \rightarrow \ \varphi_2(x) = A_2e^{\gamma x} + B_2e^{-\gamma x} \ , \ \gamma = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$

(3) : Analog zu (1): $\varphi_3(x) = A_3e^{i\Omega x} + B_3e^{-i\Omega x}$

Übergangsbedingungen

Deuten wir $B_3e^{-i\Omega x}$ als ein nach links laufende Teilchen, so können wir zweckmäßig $B_3 = 0$ setzen, da wir keine Reflexion am rechten Teil erwarten. Da alle Unstetigkeiten des Potentials endlich sind, erwarten wir die Stetigkeit der 0. und 1. Ableitung von φ auf ganz $\mathbb{R}$. Also:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(0) &\overset{!}{=} \varphi_2(0) \ \rightarrow \ A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\
\varphi_1'(0) &\overset{!}{=} \varphi_2'(0) \ \rightarrow \ i\Omega(A_1 - B_1) = \gamma(A_2 - B_2) \\
\varphi_2(a) &\overset{!}{=} \varphi_3(a) \ \rightarrow \ A_2e^{\gamma a} + B_2e^{-\gamma a} = A_3e^{i\Omega a} \\
\varphi_2'(a) &\overset{!}{=} \varphi_3'(a) \ \rightarrow \ \gamma\left(A_2e^{\gamma a} - B_2e^{-\gamma a}\right) = i\Omega A_3e^{i\Omega a}
\end{aligned}$$

Durch die ersten beiden Gleichungen bekommt man nach kurzer Umformung

$$A_2 = \frac{i\Omega(A_1 - B_1) + \gamma(A_1 + B_1)}{2\gamma} \quad , \; B_2 = \frac{\gamma(A_1 + B_1) - i\Omega(A_1 - B_1)}{2\gamma}$$

Durch die letzten beiden Gleichungen ergibt sich

$$A_2 = \frac{i\gamma - \Omega}{i\gamma + \Omega} \cdot e^{-2a\gamma} \cdot B_2$$

bzw.

$$A_3 = \frac{e^{-i\Omega a}}{2\gamma} \cdot \left\{ A_1 \cdot \left[(i\Omega + \gamma)e^{\gamma a} + (\gamma - i\Omega)e^{-\gamma a} \right] + B_1 \cdot \left[(\gamma - i\Omega)e^{\gamma a} + (i\Omega + \gamma)e^{-\gamma a} \right] \right\}$$

Einsetzen in die letzte Gleichung liefert dann schließlich

$$B_1 = \frac{\left(\Omega^2 + \gamma^2\right)\left(1 - e^{-2a\gamma}\right) \cdot A_1}{\left(\Omega^2 - \gamma^2\right)\left(1 - e^{-2a\gamma}\right) + i2\gamma\Omega\left(e^{-2a\gamma} + 1\right)} = \frac{\left(\Omega^2 + \gamma^2\right)\sinh(a\gamma) \cdot A_1}{\left(\Omega^2 - \gamma^2\right)\sinh(a\gamma) + i2\gamma\Omega\cosh(a\gamma)}$$

$$\rightarrow \; A_3 = \frac{4\Omega\gamma e^{-i\Omega a} \cdot A_1}{i\left(\Omega^2 - \gamma^2\right)\left(e^{-a\gamma} - e^{a\gamma}\right) + 2\gamma\Omega\left(e^{a\gamma} + e^{-a\gamma}\right)} = \frac{2\Omega\gamma e^{-i\Omega a} \cdot A_1}{i(\Omega^2 - \gamma^2)\sinh(a\gamma) + 2\gamma\Omega\cosh(a\gamma)}$$

Wahrscheinlichkeitsstromdichte

Im 1. Bereich ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x)$ durch:

$$\Gamma := (\Omega^2 - \gamma^2)\sinh(a\gamma) + 2i\gamma\Omega\cosh(a\gamma)$$

$$j_1(x) = \frac{\hbar}{m}\Im\left\{\varphi_1(x)^* \partial_x \varphi_1(x)\right\} = \frac{\hbar}{m}\Im\left\{\left(A_1 e^{i\Omega x} + B_1 e^{-i\Omega x}\right)^* \cdot \partial_x\left(A_1 e^{i\Omega x} + B_1 e^{-i\Omega x}\right)\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{m}\Im\left\{i\Omega\left(A_1^* e^{-i\Omega x} + B_1^* e^{i\Omega x}\right) \cdot \left(A_1 e^{i\Omega x} - B_1 e^{-i\Omega x}\right)\right\} = \frac{\hbar\Omega}{m} \cdot \Re\left\{|A_1|^2 - |B_1|^2 + B_1^* A_1 e^{2i\Omega x} - B_1 A_1^* e^{-2i\Omega x}\right\}$$

$$= \frac{\hbar\Omega}{m} \cdot \left[|A_1|^2 - |B_1|^2\right] + \frac{\hbar\Omega}{m}\Re\left\{B_1^* A_1 e^{2i\Omega x} - B_1 A_1^* e^{-2i\Omega x}\right\}$$

$$= \frac{\hbar\Omega}{m} \cdot \left[|A_1|^2 - |B_1|^2\right] + \frac{\hbar\Omega}{m}\Re\left\{|A_1|^2\left(\Omega^2 + \gamma^2\right)\sinh(a\gamma) \cdot \left[\frac{e^{2i\Omega x}}{\Gamma^*} - \frac{e^{-2i\Omega x}}{\Gamma}\right]\right\}$$

$$= \frac{\hbar\Omega}{m} \cdot \left[|A_1|^2 - |B_1|^2\right] + \frac{2\hbar\Omega\,|A_1|^2\left(\Omega^2 + \gamma^2\right)\sinh(a\gamma)}{m\,|\Gamma|^2} \cdot \underbrace{\Re\left\{\Gamma e^{2i\Omega x} - \left(\Gamma e^{2i\Omega x}\right)^*\right\}}_{0} = \frac{\hbar\Omega}{m} \cdot \left[|A_1|^2 - |B_1|^2\right]$$

Durch direktes Einsetzen von $B_1 = B_1(A_1)$ folgt:

$$j_1(x) = \frac{\hbar\Omega}{m} \cdot \frac{(\Omega^2 - \gamma^2)\sinh^2(a\gamma) + 4\gamma^2\Omega^2\cosh^2(a\gamma) - (\Omega^2 + \gamma^2)\sinh^2(a\gamma)}{(\Omega^2 - \gamma^2)^2\sinh^2(a\gamma) + 4\gamma^2\Omega^2\cosh^2(a\gamma)} \cdot |A_1|^2$$

$$= \frac{\hbar\Omega}{m} \cdot \frac{4\gamma^2\Omega^2\overbrace{\left(\cosh^2(a\gamma) - \sinh^2(a\gamma)\right)}^{1}}{(\Omega^4 + \gamma^4 + 2\gamma^2\Omega^2)\sinh^2(a\gamma) + 4\gamma^2\Omega^2\underbrace{\left(\cosh^2(a\gamma) - \sinh^2(a\gamma)\right)}_{1}} \cdot |A_1|^2 = \frac{\hbar\Omega}{m} \cdot \frac{4\gamma^2\Omega^2}{(\Omega^2 + \gamma^2)^2\sinh^2(a\gamma) + 4\gamma^2\Omega^2} \cdot |A_1|^2$$

$$= \sqrt{\frac{2E}{m}} \cdot \frac{4(V_0 - E)E}{V_0^2\sinh^2\left(a\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}\right) + 4(V_0 - E)E} \cdot |A_1|^2$$

Da es sich von Hause aus bei $\varphi(x)$ um einen stationären Zustand handelt ($\partial_t |\varphi(x)|^2 = 0$), folgt durch die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t |\varphi(x)|^2 + \underbrace{\operatorname{div} j(x)}_{\partial_x j(x)} = 0$$

dass $\partial_x j(x) = 0$ und somit j konstant auf $\mathbb{R}$ ist. Somit muss auch sowohl im Bereich (2) als auch im Bereich (3) $j \equiv j_1$ sein, also insbesondere $j_{trans} = j_1$. Eine Probe bestätigt diese Vorhersage:

$$j_3(x) = \frac{\hbar}{m} \Im \left\{ \varphi_3(x)^* \partial_x \varphi_3(x) \right\} = \frac{\hbar}{m} \Im \left\{ A_3^* e^{-i\Omega x} \cdot \partial_x \left(A_3 e^{i\Omega x} \right) \right\} = \frac{\hbar}{m} \Im \left\{ |A_3|^2 \, i\Omega \right\} = \frac{\hbar\Omega}{m} |A_3|^2$$

$$= \frac{\hbar\Omega}{m} \cdot \frac{4\gamma^2\Omega^2}{(\Omega^2 - \gamma^2)^2 \sinh^2(a\gamma) + 4\gamma^2\Omega^2 \cosh^2(a\gamma)} \cdot |A_1|^2 \overset{\substack{\text{Analog} \\ \text{zu vorhin}}}{=} \frac{\hbar\Omega}{m} \cdot \frac{4\gamma^2\Omega^2}{(\Omega^2 + \gamma^2)^2 \sinh^2(a\gamma) + 4\gamma^2\Omega^2} \cdot |A_1|^2 = j_1$$

Deuten wir für $x < 0$ das Glied $A_1 e^{i\Omega x}$ als den *nach rechts laufenden Anteil* und $B_1 e^{-i\Omega x}$ als den *nach links laufenden Anteil* des Teilchens (einlaufender und reflektierter Teil) so können wir die jeweiligen Teilimpulse j_{in} und j_{ref} einführen, gemäß

$$j_{in}(x) = \frac{\hbar}{m} \Im \left\{ \left(A_1 e^{i\Omega x} \right)^* \cdot \partial_x \left(A_1 e^{i\Omega x} \right) \right\} \overset{\substack{\text{Analog} \\ \text{zu } j_3}}{=} \frac{\hbar\Omega}{m} \cdot |A_1|^2$$

$$\text{Analog:} \quad j_{ref}(x) = \frac{\hbar\Omega}{m} \cdot |B_1|^2$$

Bemerke: Die gesamte Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j_1(x)$ setzt sich zusammen als die Differenz der beiden Teil-Stromdichten:

$$j_1(x) = j_{in} - j_{ref}$$

Deuten wir ferner φ_3 als den *durch die Potentialbarriere laufenden* Anteil (durchgetunnelter Anteil), so ergibt sich wegen $j_1 = j_3 := j_{trans}$ die erfreuliche Identität

$$j_{in} = j_{ref} + j_{trans}$$

Tunnelwahrscheinlichkeit

Die Tunnelwahrscheinlichkeit ergibt sich somit sofort als

$$T(E) = \frac{j_{trans}}{j_{in}} = \frac{4\gamma^2\Omega^2}{(\Omega^2 + \gamma^2)^2 \sinh^2(a\gamma) + 4\gamma^2\Omega^2}$$

und durch einsetzen von Ω, γ schließlich als

$$\boxed{T(E) = \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2 \sinh^2\left(a \cdot \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)} \right) + 4E(V_0 - E)}}$$

Für $qa = a \cdot \sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)} >> 1$ ist $\sinh(aq) \approx \dfrac{e^{qa}}{2}$ und somit

$$T(E) \approx \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2 \frac{e^{2qa}}{4} + 4E(V_0 - E)} \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \cdot e^{-2qa}$$

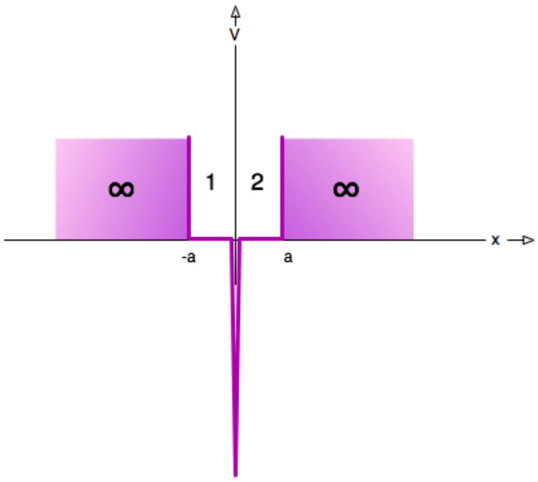
Aufgabe 21

Bestimmung der allgemeinen Lösung

Beginnen mit der stationären Schrödingergleichung

$$E\varphi(x) = \mathcal{H}\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x) + V(x)\varphi(x)$$

und lösen diese in den beiden, unten illustrierten Bereichen (1) und (2), für $E \neq 0$:



$$(1) : \partial_x^2\varphi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi_1(x) = A_1 e^{\gamma x} + B_1 e^{-\gamma x} \;,\; \gamma := \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} \in \mathbb{C}$$

$$(2) : \text{Analog:} \;\; \varphi_2(x) = A_2 e^{\gamma x} + B_2 e^{-\gamma x}$$

Bemerke: Für $E = 0$ ergeben sich die Lösungen

$$\varphi_i(x) = A_i + B_i x \;,\; i = 1, 2$$

Im Bereich $|x| \geq a$ macht die Differentialgleichung

$$E\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\varphi(x) + \infty\varphi(x)$$

nur Sinn, wenn $\varphi \equiv 0$ ist, das heißt φ verschwindet außerhalb des Intervalls $(-a, a)$.

Übergangsbedingung bei $x = 0$

Wir integrieren die Schrödingergleichung über die Kugel $B_\varepsilon(0)$, $\varepsilon \to 0$, so dass sich ergibt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varphi_2'(\varepsilon) - \varphi_1'(-\varepsilon)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\lim_{r\to 0^-}\varphi'(r) - \varphi'(-\varepsilon) + \varphi'(\varepsilon) - \lim_{r\to 0^+}\varphi'(r)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\varepsilon}^{0}\partial_x\varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{\varepsilon}\partial_x\varphi'(x)\,dx\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi''(x)\,dx \overset{E\varphi=\mathcal{H}\varphi}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left[-\frac{2Em}{\hbar^2} - 2\lambda\delta(x)\right]\varphi(x)\,dx = -\frac{2mE}{\hbar^2}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\,dx - 2\lambda\cdot\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\varphi(x)\,dx}_{\varphi(0)}$$

Da $\varphi(x)$ auf $[-a,a]$ endlich ist (da stetig auf kompaktem Intervall) ist $\sup\limits_{x\in[-a,a]} |\varphi(x)|$ endlich, so dass gilt:

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\ dx\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\ dx\right| \overset{\Delta-\text{Ungleichung}}{\leq} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|\varphi(x)|\ dx \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sup_{y\in[-a,a]}|\varphi(y)|\ dx$$

$$= \sup_{y\in[-a,a]}|\varphi(y)|\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}dx = \sup_{y\in[-a,a]}|\varphi(y)|\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}2\varepsilon = 0 \ \to\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\ dx = 0$$

Somit folgt dann

$$\boxed{(*)\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varphi_2'(\varepsilon)-\varphi_1'(-\varepsilon)\right] = -2\lambda\varphi(0)}$$

Bestimmung der Koeffizienten

Fall $E=0$: Fordern die Stetigkeit von φ auf $\mathbb{R}$, so dass folgt

$$\varphi_1(-a) \overset{!}{=} \varphi_2(a) \overset{!}{=} 0 \ \to\ A_1 - B_1 a = A_2 + B_2 a = 0$$

$$\varphi_1(0) \overset{!}{=} \varphi_2(0) \ \to\ A_1 = A_2 \ \to\ B_1 = -B_2$$

Unter Beachtung von (*) erhalten wir ferner die Bedingung

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[B_2 - B_1\right] = 2B_2 \overset{!}{=} -2\lambda\varphi(0) = -2\lambda A_2 \ \to\ B_2 = -\lambda A_2$$

Zusammenfassung der 4 Bedingungen ergibt

$$A_2\,(1-\lambda a) \overset{!}{=} 0$$

Um eine nicht-triviale Lösung (und somit eine Eigenlösung zu $E=0$) zu erhalten, muss also $\lambda a = 1$ sein.

Fall $E\neq 0$: Dann ist insbesondere $\gamma \neq 0$. Fordern die Stetigkeit von φ auf $\mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\varphi_1(-a) \overset{!}{=} \varphi_2(a) \overset{!}{=} 0 \ \to\ A_1 e^{-\gamma a} + B_1 e^{\gamma a} = A_2 e^{\gamma a} + B_2 e^{-\gamma a} = 0$$

$$\varphi_1(0) \overset{!}{=} \varphi_2(0) \ \to\ A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$

Unter Beachtung dieser Bedingung, erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma\left[A_2 e^{\gamma\varepsilon} - B_2 e^{-\gamma\varepsilon} - A_1 e^{-\gamma\varepsilon} + B_1 e^{\gamma\varepsilon}\right] = \gamma\left[A_2 - B_2 - A_1 + B_1\right] \overset{!}{=} -2\lambda\varphi(0) = -2\lambda(A_1+B_1)$$

Verwenden jetzt diese 4 Gleichungen um die Koeffizienten A_i, B_i zu bestimmen: Durch algebraische Manipulation der letzten 2 Bedingungen ergibt sich

$$B_2 = \frac{B_1(\lambda+\gamma)+\lambda A_1}{\gamma} \quad , \quad A_2 = \frac{(\gamma-\lambda)A_1 - \lambda B_1}{\gamma}$$

Einsetzen in die ersten 2 Bedingungen ergibt

$$B_1 = \frac{\left[(\gamma-\lambda)e^{\gamma a} + \lambda e^{-\gamma a}\right]}{\left[\lambda e^{\gamma a} - (\lambda+\gamma)e^{-\gamma a}\right]}\cdot A_1$$

$$\to\ A_1 e^{-\gamma a} + A_1\cdot\frac{\left[(\gamma-\lambda)e^{\gamma a} + \lambda e^{-\gamma a}\right]}{\left[\lambda e^{\gamma a} - (\lambda+\gamma)e^{-\gamma a}\right]}\cdot e^{\gamma a} = A_1\cdot\frac{\left[2\lambda + (\gamma-\lambda)e^{2\gamma a} - (\lambda+\gamma)e^{-2\gamma a}\right]}{\left[\lambda e^{\gamma a} - (\lambda+\gamma)e^{-\gamma a}\right]} \overset{!}{=} 0$$

Um nicht-triviale Lösungen erhalten zu können (das heißt insbesondere $A_1 \neq 0$), muss also gelten:

$$2\lambda + (\gamma-\lambda)e^{2\gamma a} - (\lambda+\gamma)e^{-2\gamma a} = 2\lambda + \gamma\left(e^{2\gamma a} - e^{-2\gamma a}\right) - \lambda\left(e^{2\gamma a} + e^{-2\gamma a}\right) = 0$$

also

$$\boxed{(**)\quad \gamma \sinh(2\gamma a) = \lambda\,[\cosh(2\gamma a) - 1]}$$

Obere stellt die Bestimmungsgleichung für die Energieeigenwerte des Systems dar, das heißt für die Eigenwerte $E \neq 0$ für die es nicht-triviale Eigenlösungen gibt.

Bestimmung der Energieeigenwerte

Für $E = 0$ wurde schon gezeigt dass $\lambda a = 1$ sein muss.

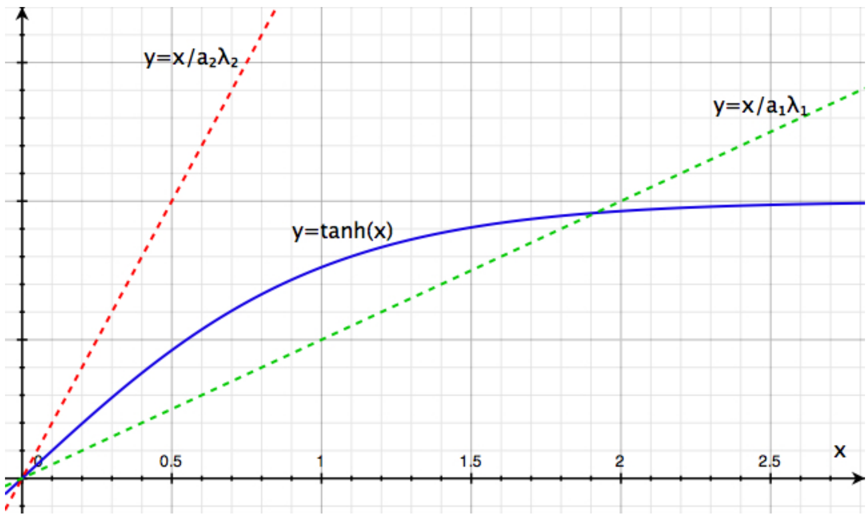
Fall $E < 0$: Dann ist $\gamma \in \mathbb{R},\ \gamma > 0$. Wir substituieren

$$x := \gamma a = a \cdot \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

und erhalten durch (**) die Bedingung:

$$\boxed{\frac{x}{a\lambda} \stackrel{!}{=} \frac{\cosh 2x - 1}{\sinh 2x} = \tanh x\ ,\ \ x > 0}$$

Jeder Energieeigenwert entspricht genau einer Lösung x dieser Gleichung. Im folgenden sind qualitativ die beiden Möglichkeiten für die Verhältnisse von $y = \tanh x$ zu $y = \dfrac{x}{a\lambda}$ für verschiedene Werte von $a\lambda$ illustriert, wobei $a_1\lambda_1 > a_2\lambda_2$ sind:



Zu erkennen ist: Die Gleichung hat entweder keine oder 1 Lösung (für genügend großes $a\lambda$). Genauer gesagt: die Graphen $y = \dfrac{x}{a\lambda}$ und $\tanh x$ haben genau dann einen Schnittpunkt, wenn gilt:

$$1 = \frac{1}{\cosh^2 x}\,|_0 = \frac{d}{dx}\tanh x\,|_0 \stackrel{!}{>} \frac{d}{dx}\frac{x}{a\lambda} = \frac{1}{a\lambda} \quad \Rightarrow \quad a\lambda > 1$$

(da $\tanh x$ konkav).

Fall $E > 0$: Dann ist $\gamma = i\Omega,\ \Omega := \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}} \in \mathbb{R}$, so dass (**) übergeht in

$$-\Omega \sin(2a\Omega) = i\Omega \sinh(2ai\Omega) \stackrel{!}{=} \lambda\,[\cosh(2ai\Omega) - 1] = \lambda\,[\cos(2a\Omega) - 1]$$

Substituieren

$$x := a\Omega = a\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

und erhalten:

$$\boxed{\frac{x}{a\lambda}\sin 2x = 1 - \cos 2x\ ,\ \ x > 0}$$

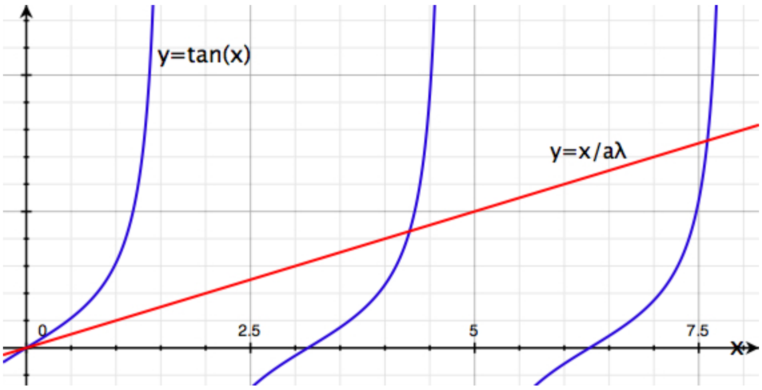
Zu erkennen ist: Für $x = \pi n,\ n \in \mathbb{N}$ ist die Gleichung erfüllt, das heißt die Werte

$$E_n = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

sind mögliche Energieeigenwerte. Für alle anderen Werte ist $\sin 2x \neq 0$, also

$$\frac{x}{a\lambda} \stackrel{!}{=} \frac{(1-\cos 2x)}{\sin 2x} = \tan x \ ,\ x > 0$$

Im folgenden ist qualitativ die Funktion $f(x) = \tan x$ und die Gerade $y = \dfrac{x}{a\lambda}$ illustriert.



Die Schnittpunkte von $f(x) = \tan x$ und $y = \dfrac{x}{a\lambda}$ entsprechen genau den Energieeigenwerten $E = \dfrac{x^2\hbar^2}{2a^2m}$. Zu sehen ist zum einen, dass es unabhängig von $a\lambda$ unendlich viele (jedoch abzählbare) Energieeigenwerte $E_n > 0$ gibt, und zum anderen, dass sich die Schnittpunkte mit wachsendem $a\lambda > 1$ nach links bewegen, bzw. sich asymptotisch der Verteilung $x_n = \pi n,\ n \in \mathbb{N}$ (Nullstellen von $\tan y$) annähern, das heißt

$$E_n \to \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$$

Zusammengefasst also: Für $E < 0$ existiert genau dann ein Energieeigenwert (und zwar nur einer) wenn $\lambda a > 1$ ist. Für $E > 0$ existieren unendlich viele, abzählbare Energieeigenwerte: eine Schar

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

und eine, die sich mit wachsendem $\lambda a > 1$ der oben genannten Verteilung nähern. Der Wert $E = 0$ ist genau dann ein Energieeigenwert wenn $\lambda a = 1$ ist.