Übung zur Quantenmechanik I
Sommersemester 2008

Abgabetermin: 17.06.08

20. Tunneleffekt (5 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m und Energie E welches von $x = -\infty$ kommend auf die Potentialbarriere

$$V(x) = V_0[\theta(x) - \theta(x-a)], \quad V_0 > 0$$

trifft. Lösen Sie die Schrödingergleichung für den Fall $0 < E < V_0$. Die Anschlussbedingungen an den Stellen der Stufen liefern eine Bedingung zwischen den Koeffizienten der allgemeinen Lösung in den Bereichen $x < 0$ und $x > a$. Berechnen Sie dort jeweils die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j = (\hbar/m)\Im(\psi^* \partial_x \psi)$. Aus $j(x < 0) \equiv j_{in} - j_{ref}$ und $j(x > a) \equiv j_{trans}$ bestimmen Sie dann die Tunnelwahrscheinlichkeit $T(E) = j_{trans}/j_{in}$. Wie lautet diese näherungsweise für den Fall $qa \gg 1$ mit $q = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$?

21. Potentialtopf mit δ–Potential (8 Punkte)

Gegeben ist ein in einer Raumdimension bewegliches Teilchen der Masse m, das sich in folgendem Potential mit $\lambda > 0$ befindet

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{m}\lambda\,\delta(x)\ , & \text{für } |x| < a \\ +\infty\ , & \text{für } |x| \geq a\,. \end{cases}$$

a) Finden Sie die Bestimmungsgleichungen für das Energiespektrum des Teilchens und lösen Sie diese, bzw. analysieren Sie ihre Lösbarkeit graphisch!

b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\psi'(0+\varepsilon) - \psi'(0-\varepsilon)) = -2\lambda\psi(0), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ \varepsilon \ll 1$$

(Hinweis: Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung über ein Intervall von $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$ und führen Sie den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durch.)

c) Unter welcher Voraussetzung an λa gibt es Zustände negativer Energie? Falls es welche gibt, gibt es eine obere Schranke an die maximale Zahl negativer Energieeigenwerte?

d) Wie verhalten sich die positiven Energieeigenwerte mit wachsendem λa?
(Hinweis: Erstellen Sie eine Skizze der positiven Energieeigenwerte aufgetragen über λa).

<u>*Hinweis:*</u> *Man beachte, daß die Energie–Eigenfunktionen hier gerade oder ungerade Parität besitzen.*