Übung zur Quantenmechanik I
Sommersemester 2008

Abgabetermin: 27.05.08

15. Virialsatz (7 Punkte)

In Dirac-Schreibweise lautet die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

mit dem Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{P}^2 + V(\boldsymbol{R}).$$

a) Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung in Ortsdarstellung die folgende Form aufweist:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r})\Big)\psi(\boldsymbol{r},t).$$

b) Leiten Sie das Ehrenfestsche Theorem

$$\partial_t\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H,A]\rangle + \langle\partial_t A\rangle \qquad \text{mit} \quad \langle A\rangle = \langle\psi(t)|A(t)|\psi(t)\rangle$$

für beliebige zeitabhängige Operatoren $A(t)$ und Zustände $\psi(t)$ her, welche die Schrödinger-Gleichung erfüllen.

Der eindimensionale Hamilton-Operator habe nun die Form $H = T + V = P^2/2m + V(X)$.

c) Wie lautet $\partial_t\langle X\rangle$ und $\partial_t\langle P\rangle$?

d) Zeigen Sie, dass $\partial_t\langle X\cdot P\rangle = 2\langle T\rangle - \langle X\cdot\nabla V\rangle$. Was ergibt sich, wenn der Zustand $|\psi(t)\rangle$ stationär ist? (Ein Zustand heißt stationär, wenn gilt $\frac{\partial}{\partial t}|\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle|^2 = 0$.)

e) Es sei V nun homogen vom Grade n, d.h. $V(\alpha X) = \alpha^n V(X)$. Zeigen Sie, dass dann für stationäre Zustände die Beziehung $2\langle T\rangle = n\langle V\rangle$ gilt. Wie lautet der Zusammenhang zwischen dem zu einem stationären Zustand gehörenden Energieeigenwert E und $\langle T\rangle$ allgemein, sowie speziell für die Potentiale $V = \frac{1}{2}m\omega^2X^2$ und $V = -e^2X^{-1}$?

16. Paritätsoperator (8 Punkte)

Auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2[-a,a]$ (Raum der im Intervall $[-a,a]$ qudratintegrablen Funktionen) sei der Paritätsoperator Π in der Ortsdarstellung definiert durch $(\Pi\psi)(x) := \psi(-x)$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\Pi^{-1} = \Pi^\dagger = \Pi$

b) Π hat nur die Eigenwerte ± 1. (Die entsprechenden Eigenvektorräume werden also von geraden bzw. ungeraden Funktionen aufgespannt.)

c) $\Pi_\pm := \frac{1}{2}(1 \pm \Pi)$ sind Projektoren auf die entsprechenden Eigenvektorräume. Ein *gerader* bzw. *ungerader* Operator A ist definiert durch

$$\Pi A \Pi^{-1} = A \qquad \text{bzw.} \qquad \Pi A \Pi^{-1} = -A.$$

Zeigen Sie nun:

d) Ortsoperator X und Impulsoperator P sind ungerade Operatoren.

e) Es seien ψ_1 und ψ_2 Eigenvektoren von Π zum selben Eigenwert. Dann ist $\langle\psi_1|A|\psi_2\rangle = 0$, falls A ein in $\mathcal{H}$ definierter ungerader Operator ist.