# Übung zur Quantenmechanik I
# Sommersemester 2008

Abgabetermin: 20.05.08

**13. Hamilton-Operator, Kommutator (5 Punkte)**

Es sei $H$ der Hamilton-Operator eines physikalischen Systems und $|\phi_n\rangle$ die Eigenvektoren von $H$ zu den Eigenwerten $E_n$ mit $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$. Zeigen Sie für einen beliebigen linearen Operator $A$ auf dem Hilbertraum die Relation:

$$\langle\phi_n|\,[A,H]\,|\phi_n\rangle = 0\ .$$

Für das eindimensionale Problem eines Teilchens mit der Masse $m$ und der potentiellen Energie $V(x)$ lautet der Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + V(X)\ .$$

**a)** Bestimmen Sie in Abhänigkeit von $P$, $X$ und $V(X)$ die Kommutatoren $[H,P]$, $[H,X]$ und $[H,XP]$.

**b)** Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Impulses (im Zustand $|\phi_n\rangle$) $\langle\phi_n|P|\phi_n\rangle$ gleich Null ist.

**c)** Stellen Sie eine Beziehung zwischen $E_{kin} = \langle\phi_n|\frac{P^2}{2m}|\phi_n\rangle$ (dem Erwartungswert der kinetischen Energie im Zustand $|\phi_n\rangle$) und $\langle\phi_n|X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X}|\phi_n\rangle$ her. Wie hängt der Erwartungswert der kinetischen Energie mit dem Erwartungswert der potentiellen Energie $\langle\phi_n|V(X)|\phi_n\rangle$ zusammen? Verwenden Sie für das Potential

$$V(X) = V_0X^k, \qquad V_0 > 0, \quad k = 2,4,6,\dots\ .$$

**14. Kommutierende Operatoren (3 Punkte)**

Betrachten Sie zwei Operatoren $A$ und $B$ in einem vierdimensionalem Vektorraum, deren Matrixelemente bzgl. der Orthonormalbasis $|e_1\rangle,\dots,|e_4\rangle$ durch

$$(A_{ij}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (B_{ij}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben seien. Zeigen Sie, dass $A$ und $B$ kommutieren, und bestimmen Sie eine gemeinsame Basis von normierten Eigenvektoren $|a,b\rangle$, wobei $a$ und $b$ die Eigenwerte von $A$ bzw. $B$ bezeichnen mögen: $A|a,b\rangle = a|a,b\rangle$ und $B|a,b\rangle = b|a,b\rangle$.
Paarweise vertauschende selbstadjungierte Operatoren bilden einen vollständigen Satz von kommutierenden Observablen, wenn ihre gemeinsamen Eigenvektoren eindeutig (bis auf einen multiplikativen Faktor) durch Angabe aller zugehörigen Eigenwerte bestimmt sind, d.h., wenn die gemeinsamen Eigenvektoren nicht entartet sind. Welche der drei Sätze von Operatoren $\{A\}$, $\{B\}$, $\{A;B\}$ erfüllen diese Beziehung?