Übung zur Quantenmechanik I
Sommersemester 2008

Abgabetermin: 13.05.08

10. Kommutatoren (3 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Kommutators:

a) $[A, B] = -[B, A]$

b) $[A, (B + C)] = [A, B] + [A, C]$

c) $[A, BC] = [A, B]\,C + B\,[A, C]$

d) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

e) $[A, B]^\dagger = \left[B^\dagger, A^\dagger\right]$

11. Kommutatoren, Eigenvektoren und Eigenwerte (7 Punkte)

Es seien $|\phi_n\rangle$ die Eigenzustände eines hermiteschen Operators H und es werde vorausgesetzt, dass diese Zustände eine diskrete orthonormierte Basis bilden. Der Operator $U(m, n)$ sei definiert durch

$$U(m, n) = |\phi_m\rangle\langle\phi_n| \ .$$

a) Bestimmen Sie den zu $U(m, n)$ adjungierten Operator $U^\dagger(m, n)$.

b) Bestimmen Sie den Kommutator $[H, U(m, n)]$.

c) Beweisen Sie die Beziehung

$$U(m, n)U^\dagger(p, q) = \delta_{n,q} U(m, p) \ .$$

d) Berechnen Sie die Spur $\mathrm{Sp}\{U(m, n)\}$. Die Spur eines beliebigen Operators A ist gegeben durch $\mathrm{Sp}\{A\} = \sum\limits_i \langle\phi_i|A|\phi_i\rangle$.

e) Zeigen Sie $\mathrm{Sp}\{A\}$ ist invariant bei Basiswechsel. Zeige Sie des Weiteren $\mathrm{Sp}\{ABC\} = \mathrm{Sp}\{BCA\} = \mathrm{Sp}\{CAB\}$.

e) Es sei A ein Operator mit den Matrixelementen $A_{mn} = \langle\phi_m|A|\phi_n\rangle$. Man beweise die Beziehung

$$A = \sum_{m,n} A_{mn} U(m, n) \ .$$

f) Zeigen Sie, dass $A_{nm} = \mathrm{Sp}\{\mathrm{A}\, U^\dagger(m, n)\}$.

12. Projektoren (2 Punkte)

Es sei P_1 der Orthogonalprojektor auf den Unterraum $\mathcal{H}_1$ und P_2 der Orthogonalprojektor auf den Unterraum $\mathcal{H}_2$. Zeigen Sie: Damit das Produkt P_1P_2 ebenfalls ein Orthogonalprojektor ist, ist es notwendig und hinreichend, dass P_1 und P_2 vertauschen. Welches ist in diesem Fall der Unterraum auf den P_1P_2 projiziert?