Übung zur Quantenmechanik I
Sommersemester 2008

Abgabetermin: 29.04.08

4. Hermite-Polynome (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

auf dem Vektorraum der reellwertigen Polynome über $\mathbb{R}$ ein positiv-definites Skalarprodukt definiert. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis $(e_1, ..., e_4)$ des Unterraumes $\mathrm{span}(f_0, ..., f_4)$ mit $f_n = x^n$. Dabei können Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren verwenden:

$$e_n = f_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(e_i, f_n)}{(e_i, e_i)} e_i \ .$$

5. Wellenpaket (4 Punkte)

Das eindimeinsionale Wellenpaket

$$\psi(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(kx-\omega(k)t)} \tilde{\psi}(k) dk$$

habe zur Zeit $t = 0$ die Gestalt einer Gauss-Glocke:

$$\psi(0,x) = Ae^{\frac{-x^2}{2b^2}} e^{ik_0 x} \ .$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Schrödinger Gleichung die Dispersionsrelation $\omega(k)$.

b) Bestimmen Sie die (reelle) Normierungskonstante A.

c) Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte $\tilde{\psi}(k)$ der Wellenfunktion $\psi(t,x)$ ebenfalls die Gestalt einer Gauss-Glocke hat.

d) Als Breite der Gauss-Glocke wird der Abstand der symmetrisch zum Maximum liegenden Punkte definiert, bei denen der Funktionswert auf den e-ten Teil des Maximums abgefallen ist. Berechnen Sie die Breite Δk von $|\tilde{\psi}(k)|^2$.

Hinweis: Nutzen Sie die Relation:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{c}{2}x^2 + ijx} \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{\sqrt{c}} e^{-\frac{j^2}{2c}} \qquad \text{für } c, j \in \mathbb{R},\ c > 0$$

6. Plancksches Strahlungsgesetz (2 Punkte)

Wie ändert sich das Plancksche Strahlungsgesetz, wenn man die induzierte Emission in der Einsteinschen Herleitung weglässt? Welches Strahlungsgesetz erhält man, wenn man das Verhältnis der beiden verbleibenden Einsteinkoeffizienten unabhängig von der Temperatur annimmt?