Übung zur Quantenmechanik I
Sommersemester 2008

Abgabetermin: 22.04.08

1. Teilchen und Wellen (6 Punkte)

a) Berechnen Sie die de Broglie-Wellenlänge eines Elektrons im Wasserstoffatom auf der energetisch niedrigsten Bohrsche-Bahn sowie eines Fußballs (Durchmesser 0.3m, Masse 0.5kg), der mit der Geschwindigkeit von 100km/h auf das gegnerische Tor zufliegt. Warum kann man den Wellercharakter des Fussballs vernachlässigen und daher mit der Newtonschen Theorie rechnen, jedoch bei Elektronen im Wasserstoffatom nicht?

b) Ein Teilchen sei in einem Kasten der Seitenlänge L eingesperrt. Berechnen Sie die Unschärfe des Teilchenimpulses sowie die kinetische Energie und die Unschärfe der Energie. Die Wellenlänge des Teilchens soll mit der Kastengröße identifiziert werden.

c) Berechnen Sie die Comptonwellenlänge für ein Elektron und ein Proton. Zeigen Sie, dass man die Comptonwellenlänge zum einen durch Gleichsetzen von hν mit mc^2 eines Teilchens erhalten kann und zum anderen aus der Überlegung, dass die kinetische Energie eines Teilchens den Wert $2mc^2$ nicht überschreiten darf, weil diese Energie ansonsten ausreichen würde, spontan zwei neue Teilchen derselben Masse aus dem Vakuum zu erzwingen.

2. Gaußsche Integrale (3 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{c}{2}x^2} dx \quad \text{für } c \in \mathbb{R}, c > 0 \ .$$

b) Berechnen Sie nun

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{c}{2}x^2 + jx} dx \quad \text{für } j \in \mathbb{R} \ .$$

3. Lineare Algebra (5 Punkte)

Sei $V = \mathbb{C}^n$ ein komplexer Vektorraum und sei $(\cdot\,,\cdot)$ ein Skalarprodukt, d.h. für ein $\phi, \psi, \chi \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $(\psi\,,\phi) = (\phi\,,\psi)^*$
2. $(\psi\,,\alpha\phi + \beta\chi) = \alpha(\psi\,,\phi) + \beta(\psi\,,\chi)$
3. $(\psi\,,\psi) > 0$ für $\psi \neq 0$ und $(\psi\,,\psi) = 0$ für $\psi = 0$.

a) Sei $\{e_1,..., e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V, $a_i \in \mathbb{C}$ die Entwicklungskoeffizienten eines beliebigen Vectors $\phi \in V, \phi = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Zeigen Sie, dass $a_i = (e_i, \phi)$ und $(\phi, \phi) = \sum_{i=1}^n a_i^* a_i$.

Sei nun $A : V \longrightarrow V$ eine lineare Abblidung. Die Exponentialabbildung kann mit Hilfe der Reihenentwicklung definiert werden:

$$\exp(A) = \mathbb{1} + A + \frac{1}{2!}A^2 + ...$$

b) Zeigen Sie: Hat A bezüglich $\{e_1,..., e_n\}$ die Matrixelemente a_{ik}, so hat die adjungierte Abbildung $A^\dagger$ die Matrixelemente a_{ki}^*.

c) Berechnen Sie $\exp(z\sigma_3)$ und $\exp(z\sigma_2)$ mit $z \in \mathbb{C}$. Die σ_i sind die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

d) Zeigen Sie: Ist A hermitesch ($A^\dagger = A$), so ist $U = \exp(iA)$ unitär ($UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$).