Tannoudji - Quantenmechanik I

Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

Stilianos Louca

16. Juli 2008

Kapitel 3

04 - Ausbreitung eines freien Wellenpaketes

Der Hamilton Operator $\mathcal{H}$ des freien Teilchens ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m}$$

a) Beginnen mit dem Ehrenfestschen Theorem für beliebige Operatoren A und die Schrödinger Gleichung lösende Zustände ψ:

$$\partial_t \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle + \langle \partial_t A \rangle$$

und den Identitäten

$$[H, X] = \frac{1}{2m} \left[P^2, X\right] = \frac{1}{2m} \{P[P, X] + [P, X]P\} = \frac{1}{2m} [-i\hbar P - i\hbar P] = -\frac{i\hbar}{m} P$$

$$[H, P] = \frac{1}{2m} \left[P^2, P\right] = 0$$

$$\left[H, P^2\right] = \frac{1}{m} \left[P^2, P^2\right] = 0$$

$$[H, XP + PX] = X \underbrace{[H, P]}_{0} + [H, X]P + P[H, X] + \underbrace{[H, P]}_{0} X = -\frac{i2\hbar}{m} P^2$$

$$\left[H, X^2\right] = X[H, X] + [H, X]X = -\frac{i\hbar}{m} [XP + PX]$$

und schreiben:

$$\partial_t \langle P \rangle = \frac{i}{\hbar} \underbrace{\langle [H, P] \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \partial_t P \rangle}_{0} = 0 \ \rightarrow \ \langle P \rangle =: a \in \mathbb{R}$$

$$\partial_t \langle X \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, X] \rangle + \underbrace{\langle \partial_t X \rangle}_{0} = \frac{1}{m} \langle P \rangle = \frac{a}{m} \ \rightarrow \ \langle X \rangle = \frac{a}{m} \cdot t$$

b) Analog ist

$$\partial_t \left\langle P^2 \right\rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \underbrace{[H, P^2]}_{0} \rangle + \langle \underbrace{\partial_t P^2}_{0} \rangle = 0 \;\rightarrow\; \left\langle P^2 \right\rangle =: \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\partial_t \left\langle XP + PX \right\rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle [H, XP + XP] \right\rangle + \langle \underbrace{\partial_t (XP + PX)}_{0} \rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle -\frac{2i\hbar}{m} P^2 \right\rangle = \frac{2}{m} \left\langle P^2 \right\rangle = \frac{2\alpha}{m}$$

$$\rightarrow \; \left\langle XP + PX \right\rangle = \frac{2\alpha}{m} \cdot t + \beta$$

$$\partial_t \left\langle X^2 \right\rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle [H, X^2] \right\rangle + \langle \underbrace{\partial_t X^2}_{0} \rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle -\frac{i\hbar}{m} [XP + PX] \right\rangle = \frac{1}{m} \left\langle XP + PX \right\rangle = \frac{2\alpha}{m^2} \cdot t + \frac{\beta}{m}$$

$$\rightarrow \; \left\langle X^2 \right\rangle = \frac{\alpha}{m^2} \cdot t^2 + \frac{\beta}{m} \cdot t + \gamma$$

c) Es ist

$$(\Delta X)^2 = \left\langle X^2 \right\rangle - \left\langle X \right\rangle^2 = \frac{\alpha}{m^2} \cdot t^2 + \frac{\beta}{m} \cdot t + \gamma - \frac{a^2}{m^2} \cdot t^2 = \frac{t^2}{m^2} \left(\alpha - a^2 \right) + \frac{\beta}{m} \cdot t + \gamma$$

$$= \frac{t^2}{m^2} \underbrace{\left(\left\langle P^2 \right\rangle - \left\langle P \right\rangle^2 \right)}_{(\Delta P)_0^2} + \frac{\beta}{m} \cdot t + \gamma = \frac{t^2}{m^2} (\Delta P)_0^2 + \frac{\beta}{m} \cdot t + \gamma$$

$$= \frac{1}{m^2} (\Delta P)_0^2 \cdot \left(t + \frac{\beta m}{2(\Delta P)_0^2} \right)^2 + \frac{(\Delta P)_0^2}{m^2} \cdot \left(-\frac{\beta m}{2(\Delta P)_0^2} \right)^2 + \frac{\beta}{m} \cdot \left(-\frac{\beta m}{2(\Delta P)_0^2} \right) + \gamma$$

$$= \frac{(\Delta P)_0^2}{m^2} \cdot (t - t_0)^2 + \underbrace{\frac{(\Delta P)_0^2}{m^2} \cdot t_0^2 + \frac{\beta}{m} \cdot t_0 + \gamma}_{(\Delta X)^2 (t = t_0) =: (\Delta X)_0^2} = \frac{(\Delta P)_0^2}{m^2} \cdot (t - t_0)^2 + (\Delta X)_0^2$$

wobei die *Anfangszeit* $t_0 := -\dfrac{\beta m}{2(\Delta P)_0^2}$ festgelegt wurde.
Bemerkung: Es wurde im Endeffekt solch ein t_0 gesucht, für das gilt:

$$(\Delta X)^2(t) = \frac{t^2}{m^2} (\Delta P)_0^2 + \frac{\beta}{m} \cdot t + \gamma \overset{!}{=} \frac{(\Delta P)_0^2}{m^2} \cdot (t - t_0)^2 + (\Delta X)^2 (t_0)$$

Breitlaufen des Pakets: Deuten wir ΔX als die Breite des Wellenpaketes, so wächst die (asymptotisch) linear mit der Zeit, wobei sie am Zeitpunkt $t = t_0$ minimal war. Dies ist als die, mit der Zeit wachsende, aus der Impuls- und somit Geschwindigkeitsunsicherheit resultierende, Unsicherheit der Teilchen-Position zu interpretieren.

05 - Teilchen unter konstanter Kraft

Der Hamilton Operator für dieses Teilchen ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} - fX$$

a) Beginnen mit dem Ehrenfestschen Theorem für beliebige Operatoren A

$$\partial_t \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle + \langle \partial_t A \rangle$$

und schreiben

$$\partial_t \langle P \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, P] \rangle + \underbrace{\langle \partial_t P \rangle}_{0} = \frac{i}{\hbar} \left\langle \frac{1}{2m} \left[P^2, P\right] - f\,[X, P] \right\rangle = -\frac{if}{\hbar} \langle \underbrace{[X, P]}_{i\hbar} = f \;\rightarrow\; \langle P \rangle = f \cdot t + \alpha$$

$$\partial_t \langle X \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, X] \rangle + \underbrace{\langle \partial_t X \rangle}_{0} = \frac{i}{\hbar} \left\langle \frac{1}{2m} \left[P^2, X\right] - f\,[X, X] \right\rangle = \frac{i}{2m\hbar} \langle P \underbrace{[P, X]}_{-i\hbar} + \underbrace{[P, X]}_{-i\hbar} P \rangle = \frac{1}{m} \langle P \rangle = \frac{f}{m} \cdot t + \frac{\alpha}{m}$$

$$\rightarrow\; \langle X \rangle = \frac{f}{2m} \cdot t^2 + \frac{\alpha}{m} \cdot t + \beta$$

Assoziieren wir $\langle P \rangle =: p,\ \langle X \rangle =: x$ jeweils mit dem Impuls und dem Ort eines klassischen Teilchens, so ergeben sich genau die Newtonschen Axiome

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \ ,\ \dot{p} = f = -\nabla V$$

b) Berechnen

$$\partial_t \left\langle P^2 \right\rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[H, P^2\right] \right\rangle + \underbrace{\left\langle \partial_t P^2 \right\rangle}_{0} = \frac{i}{\hbar} \left\langle \frac{1}{2m} \left[P^2, P\right] - f \left[X, P^2\right] \right\rangle = -\frac{if}{\hbar} \langle P \underbrace{[X, P]}_{i\hbar} + \underbrace{[X, P]}_{i\hbar} P \rangle = 2f \langle P \rangle$$

so dass sich ergibt

$$\partial_t (\Delta P)^2 = \partial_t \left(\left\langle P^2 \right\rangle - \langle P \rangle^2 \right) = \partial_t \left\langle P^2 \right\rangle - \partial_t \langle P \rangle^2 = 2f \langle P \rangle - 2 \langle P \rangle \underbrace{\partial_t \langle P \rangle}_{f} = 2f \langle P \rangle - 2f \langle P \rangle = 0$$

c) Beginnen mit der Schrödingergleichung

$$i\hbar \partial_t \psi = \mathcal{H} \psi = \frac{P^2}{2m} \psi - f X \psi$$

und schreiben

$$i\hbar \partial_t \langle p \,|\psi \rangle = i\hbar (\partial_t \langle p \,|\psi \rangle - \underbrace{\langle \partial_t p \,|\psi \rangle}_{0}) = i\hbar \langle p \,|\partial_t \psi \rangle = \langle p \,|i\hbar \partial_t \psi \rangle$$

$$= \langle p \,|\mathcal{H} \psi \rangle = \langle p | \frac{P^2}{2m} |\psi \rangle - \langle p | f X |\psi \rangle = \frac{p^2}{2m} \langle p \,|\psi \rangle - f i\hbar \partial_p \langle p \,|\psi \rangle$$

Durch komplex-konjugieren der Gleichung erhält man analog

$$-i\hbar \partial_t \langle p \,|\psi \rangle^* = \frac{p^2}{2m} \langle p \,|\psi \rangle^* + i\hbar f \partial_p \langle p \,|\psi \rangle^*$$

so dass sich ergibt

$$\partial_t |\langle p \,|\psi(t) \rangle|^2 = \partial_t \left(\langle p \,|\psi \rangle \langle p \,|\psi \rangle^* \right) = \langle p \,|\psi \rangle \partial_t \langle p \,|\psi \rangle^* + \langle p \,|\psi \rangle^* \partial_t \langle p \,|\psi \rangle$$

$$= \langle p \,|\psi \rangle \cdot \left[\frac{ip^2}{2m\hbar} \langle p \,|\psi \rangle^* - f \partial_p \langle p \,|\psi \rangle^* \right] + \langle p \,|\psi \rangle^* \cdot \left[-\frac{ip^2}{2m\hbar} \langle p \,|\psi \rangle - f \partial_p \langle p \,|\psi \rangle \right]$$

$$= -f \langle p \,|\psi \rangle \partial_p \langle p \,|\psi \rangle^* - f \langle p \,|\psi \rangle^* \partial_p \langle p \,|\psi \rangle = -f \partial_p \left(\langle p \,|\psi \rangle \langle p \,|\psi \rangle^* \right) = -f \partial_p |\langle p \,|\psi(t) \rangle|^2$$

Nennen wir $\varphi(p,t) := |\langle p\,|\psi(t)\rangle|^2$ so erhält man die lineare, partielle Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\partial_t\varphi(p,t) + f\partial_p\varphi(p,t) = 0$$

deren allgemeine Lösung sich ergibt als

$$\varphi(p,t) = \Psi(p-ft)$$

Durch die Anfangsbedingung

$$\Psi(p) = \varphi(p,0) \overset{!}{=} |\langle p\,|\psi(0)\rangle|^2$$

ergibt sich schließlich

$$|\langle p\,|\psi(t)\rangle|^2 = \varphi(p,t) = \Psi(p-ft) = |\langle p-ft\,|\psi(0)\rangle|^2$$

bzw.

$$\boxed{|\langle p\,|\psi(t)\rangle| = |\langle p-ft\,|\psi(0)\rangle|}$$

das heißt die Verteilung $|\langle p\,|\psi(t)\rangle|$ *wandert* (bzw. verschiebt sich) in *positiver* p-Richtung, mit der Geschwindigkeit f. Insbesondere ändert sich die globale Form der Verteilung $|\langle p\,|\psi\rangle|$ nicht. Dies ist in voller Übereinstimmung mit der Tatsache $\partial_t\langle P\rangle = f$ und $\partial_t\Delta P = 0$, das heißt der Impuls (bzw. Impulsverteilung) des Teilchens wächst aufgrund der *auf Ihn wirkende Kraft* $F = -\nabla V = f$ linear mit der Zeit.

08 - Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte

a) Beginnen mit

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{1}{m}\Re\left\{\psi^*(\vec{r})\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\psi(\vec{r})\right)\right\}$$

und schreiben

$$m\int_{\mathbb{R}^3} d^3r J_x(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\ \Re\left\{\psi^*(\vec{r})\frac{\hbar}{i}\partial_x\psi(\vec{r})\right\} = \Re\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\ \psi(\vec{r})^*\cdot\underbrace{\frac{\hbar}{i}\psi(\vec{r})}_{\langle\vec{r}|P_x|\psi\rangle} = \Re\langle\psi|\,P_x\,|\psi\rangle \overset{\langle P_x\rangle\in\mathbb{R}}{=} \langle P_x\rangle$$

Äquivalente Ausdrücke ergeben sich auch für J_y und J_z, so dass schließlich folgt

$$m\int_{\mathbb{R}^3}\mathbf{J}(\vec{r})\ d^3r = \langle\mathbf{P}\rangle \quad \square$$

b) Betrachten den Operator

$$L_k = (\mathbf{R}\times\mathbf{P})_k = X^l P^j\varepsilon_{ljk}$$

Dieser ist hermitesch:

$$L_k^\dagger = \left(X^l P^j\varepsilon_{ljk}\right)^\dagger = \left(P^j\right)^\dagger\left(X^l\right)^\dagger\varepsilon_{ljk} = P^j X^l\varepsilon_{ljk} \overset{*}{=} X^l P^j\varepsilon_{ljk} = L_k$$

denn die Operatoren $P^j X^l$ kommutieren genau dann wenn $j \neq l$ ist, und ε_{ljk} ist für $l = j$ sowieso 0 (*). Somit ist $\mathbf{L}$ hermitesch, also $\langle\mathbf{L}\rangle\in\mathbb{R}$. Analog zu vorhin ist nun

$$\langle\mathbf{L}\rangle = \langle\mathbf{R}\times\mathbf{P}\rangle = \left\langle X^l P^j\varepsilon_{ljk}\right\rangle\vec{e}_k = \int_{\mathbb{R}^3}\psi(\vec{r})^*\cdot\langle\psi|\,X^l J^j\varepsilon_{ljk}\,|\psi\rangle\,\vec{e}_k\ d^3r = \int_{\mathbb{R}^3}\psi(\vec{r})^*\cdot x^l\frac{\hbar}{i}\partial_j\psi(\vec{r})\varepsilon_{ljk}\vec{e}_k\ d^3r$$

$$\overset{\langle\mathbf{L}\rangle\in\mathbb{R}}{=} \Re\int_{\mathbb{R}} x^l\left(\psi(\vec{r})^*\cdot\frac{\hbar}{i}\partial_j\psi(\vec{r})\right)\varepsilon_{ljk}\vec{e}_k\ d^3r = m\int_{\mathbb{R}^3} x^l\cdot\underbrace{\frac{1}{m}\Re\left(\psi(\vec{r})^*\cdot\frac{\hbar}{i}\nabla\psi(\vec{r})\right)_j}_{J^j(\vec{r})}\varepsilon_{ljk}\vec{e}_k\ d^3r$$

$$= m\int_{\mathbb{R}^3} x^l J^j(\vec{r})\varepsilon_{ljk}\vec{e}_k\ d^3r = \int_{\mathbb{R}}\vec{r}\times\vec{J}(\vec{r})\ d^3r \quad \square$$

Aufgabe 14

a) Die charakteristischen Polynome von $\mathcal{H}, A, B$ sind jeweils gegeben durch

$$p_H(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - H) = (X - \hbar\omega)(X - 2\hbar\omega)^2$$

$$p_A(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - A) = (X - a)^2(X + a)$$

$$p_B(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - B) = (X - b)^2(X + b)$$

wobei u_1, u_2, u_3 jeweils Eigenvektoren von $\mathcal{H}$ bzgl. der Eigenwerte $\hbar\omega, 2\hbar\omega, 2\hbar\omega$ sind. Die allgemein möglichen messbaren Energien sind genau die Eigenwerte von $\mathcal{H}$ für die die Orthogonalrojektion von ψ in deren Eigenraum nicht verschwindet. In unserem Fall ist dies für alle beiden Eigenwerte der Fall, das heißt es kann sowohl die Energie $E_1 = \hbar\omega$ als auch die Energie $E_2 = 2\hbar\omega$ gemessen werden. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit den Wert λ einer Observablen L zu finden ist allgemein gegeben durch

$$\mathcal{P}(\lambda) = \langle P_\lambda \psi \,| P_\lambda \psi \rangle$$

wobei P_λ genau der Orthogonalprojektor in den Eigenraum $E_\lambda(L)$ ist. Ferner ergibt sich kurz nach der Messung der Zustand

$$\frac{P_\lambda \psi}{\sqrt{\langle \psi, P_\lambda \psi \rangle}}$$

Somit ist im Falle der Energie (Observable $\mathcal{H}$):

$$\mathcal{P}(\hbar\omega) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 \right\rangle = \frac{1}{2} \langle u_1 \,| u_1 \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{P}(2\hbar\omega) = \left\langle \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{2} u_3 \,\middle|\, \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{2} u_3 \right\rangle = \frac{1}{4} \langle u_2 \,| u_2 \rangle + \frac{1}{4} \langle u_3 \,| u_3 \rangle = \frac{1}{2}$$

Der Erwartungswert $\langle \mathcal{H} \rangle$ ergibt sich als

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \hbar\omega \mathcal{P}(\hbar\omega) + 2\hbar\omega \mathcal{P}(\hbar\omega) = \frac{3\hbar\omega}{2}$$

Die Standardabweichung $\Delta\mathcal{H}$ ergibt sich entsprechend als

$$\Delta\mathcal{H} = \sqrt{\langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2} = \sqrt{[(\hbar\omega)^2 \mathcal{P}(\hbar\omega) + (2\hbar\omega)^2 \mathcal{P}(2\hbar\omega)] - \left(\frac{3\hbar\omega}{2}\right)^2} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Variante: Alternativ ergibt sich

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \langle \psi, \mathcal{H}\psi \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \hbar\omega & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{3\hbar\omega}{2}$$

$$\langle \mathcal{H}^2 \rangle = \langle \psi, \mathcal{H}^2\psi \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \hbar^2\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4\hbar^2\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\hbar^2\omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{5\hbar^2\omega^2}{2}$$

$$\rightarrow \quad \Delta\mathcal{H} = \sqrt{\langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

b) Die Eigenräume von A zu den Eigenwerten $a, -a$ ergeben sich als

$$E_a(A) = \text{span}\{u_1, u_2 + u_3\}\ ,\ E_{-a}(A) = \text{span}\{u_3 - u_2\}\ ,\ E_a(A) \perp E_{-a}(A)$$

wobei die Eigenvektoren $u_1, u_2 + u_3, u_3 - u_2$ linear unabhängig sind und somit eine Basis des Raumes bilden. Entwickeln also ψ in dieser Basis

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 + \frac{1}{2} \cdot (u_2 + u_3) + 0 \cdot (u_3 - u_2)$$

und sehen dass zwar $P_a \psi(0) \neq 0$ jedoch $P_{-a}\psi = 0$ ist, das heißt der einzige mögliche (also mit Wahrscheinlichkeit 1) Messwert ist a. Wegen $P_a \psi = \psi$ ändert sich mit der Messung der Observablen A nichts am Zustand.

c) Da $\mathcal{H}$ zeitunabhängig ist, ist der Propagationsoperator gegeben durch

$$\mathscr{P}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)\mathcal{H}\right) = \exp\begin{pmatrix} -i\omega(t - t_0) & 0 & 0 \\ 0 & -i2\omega(t - t_0) & 0 \\ 0 & 0 & -i2\omega(t - t_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\omega(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i2\omega(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i2\omega(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

das heißt der Zustand ist wegen $i\hbar\partial_t \psi = \mathcal{H}\psi$ am Zeitpunkt $t > 0$ gegeben durch

$$\psi(t) = \mathscr{P}(t, 0)\psi(0) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \cdot u_1 + \frac{e^{-i2\omega t}}{2} \cdot u_2 + \frac{e^{-i2\omega t}}{2} \cdot u_3$$

d) Die Erwartungswerte $\langle A \rangle, \langle B \rangle$ ergeben sich zum Zeitpunkt t als

$$\langle A \rangle (t) = \langle \psi(t), A\psi(t) \rangle = \left(\frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{i2\omega t}}{2}, \frac{e^{i2\omega t}}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i2\omega t}}{2} \\ \frac{e^{-i2\omega t}}{2} \end{pmatrix} = a$$

$$\langle B \rangle (t) = \langle \psi(t), A\psi(t) \rangle = \left(\frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{i2\omega t}}{2}, \frac{e^{i2\omega t}}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i2\omega t}}{2} \\ \frac{e^{-i2\omega t}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{2}}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) + \frac{b}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}\cos(\omega t) + \frac{b}{4}$$

Somit ist A für den speziellen Zustand eine *Erhaltungsgröße* der Zeit, und B (im klassischen Sinne) eine sich periodisch wiederholende Eigenschaft des Zustandes.

e) Wir haben gesehen dass der Erwartungswert von A stets a ist, und A sowieso nur die beiden Eigenwerte a und $-a$ hat. Die einzige *Gewichtung* dieser beiden möglichen Messwerte die stets a als Mittelwert liefern würde, ist $1 \cdot a + 0 \cdot (-a)$, das heißt es kann stets sogar nur der Wert a gemessen werden.
Analoge Überlegung gilt auch für B: die einzigen möglichen Messwerte sind b und $-b$, das heißt der Erwartungswert ergibt sich als

$$\mathcal{P}(b) \cdot b + \mathcal{P}(-b) \cdot (-b) \stackrel{!}{=} \frac{b}{\sqrt{2}}\cos(\omega t) + \frac{b}{4}$$

wobei $\mathcal{P}(b)$ und $\mathcal{P}(-b)$ jeweils die Wahrscheinlichkeiten sind den Wert b und $-b$ zu messen. Wegen $\mathcal{P}(b) + \mathcal{P}(-b) = 1$ ergibt sich durch algebraische Manipulation

$$\mathcal{P}(b) = \frac{5}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\omega t)\quad,\quad \mathcal{P}(-b) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\omega t)$$