Klausur 1 zur Quantenmechanik I – WS 2007/08

13.12.07

(1) Hermitesche Operatoren **2 P.**

A und B seien hermitesche Operatoren. Ist $\exp(\mathrm{i}[A\,,B])$ hermitesch? Zeigen Sie, daß der Erwartungswert $\langle [A\,,B]\rangle$ rein imaginär ist.

(2) Aufenthaltswahrscheinlichkeit **3 P.**

Ein Teilchen befinde sich in einem Zustand mit Ortswellenfunktion

$$\psi(t,\vec{r}) = \mathcal{N}\,\mathrm{e}^{-|x|/2a-|y|/2b-|z|/2c-\mathrm{i}Et/\hbar}$$

mit reellen Konstanten $a, b, c > 0$ sowie Normierungsfaktor $\mathcal{N}$. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der Position des Teilchens dieses zwischen $x = 0$ und $x = d > 0$ vorzufinden?

(3) Teilchen im Morse-Potential **3 P.**

Ein Teilchen mit Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x) \propto \mathrm{e}^{-(x-x_0)^2/2b^2}$ befinde sich im sogenannten Morse-Potential

$$V(x) = V_0\big(1-\mathrm{e}^{-x/a}\big)^2 \ .$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle V'(x)\rangle$. An welcher Stelle x_0 verschwindet dieser?

(4) Zum Virialsatz **3 P.**

Der Hamilton-Operator habe die Form $H = T + V = \vec{p}^{\,2}/2m + V(\vec{x})$. Zeigen Sie, daß

$$\partial_t\langle\vec{x}\cdot\vec{p}\rangle = 2\langle T\rangle - \langle\vec{x}\cdot\nabla V\rangle \ ,$$

wobei die Erwartungswerte mit einem die Schrödinger-Gleichung erfüllenden Zustand $|\psi(t)\rangle$ gebildet werden. Was ergibt sich, wenn der Zustand stationär ist, d.h., wenn $|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}|\psi(0)\rangle$?

(5) Rekonstruktion der Dichtematrix **4 P.**

Bezüglich einer Basis eines zweidimensionalen Hilbert-Raums seien drei Observable durch die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Im vorliegenden Zustand wurden die Erwartungswerte $\langle A\rangle = 4$, $\langle B\rangle = 3/2$ und $\langle C\rangle = 2$ gemessen. Bestimmen Sie die Dichtematrix des Zustands. Ist dieser rein oder gemischt?

(6) Zeitentwicklung **5 P.**

Für einen zeitabhängigen Hamilton-Operator mit diskretem Spektrum sei zu jedem Zeitpunkt das Eigenwertproblem

$$H(t)\,|\phi_n(t)\rangle = E_n(t)\,|\phi_n(t)\rangle$$

gelöst. Zeigen Sie, daß die Koeffizienten $c_n(t)$ in der Entwicklung einer Lösung $|\psi(t)\rangle$ der Schrödinger-Gleichung nach den orthonormierten Eigenvektoren $|\phi_n(t)\rangle$ die Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t c_m(t) = \sum_n h_{mn}(t) c_n(t) \quad \text{mit} \quad h_{mn}(t) = \delta_{mn} E_n(t) + \mathrm{i}\hbar\langle\partial_t\phi_m(t)|\phi_n(t)\rangle$$

erfüllen. Ist die Matrix $h_{mn}(t)$ hermitesch? Bestimmen Sie die $c_n(t)$ für zeitunabhängige Hamilton-Operatoren.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!