Quantenmechanik I

FSU Jena - SS 08

Klausur 2

July 17, 2008

---

1. Darstellung der Drehimpulsalgebra - 6 P.

Es seien die Drehimpulsoperatoren L_z und $L_\pm$ gegeben durch

$$L_z \left|lm\right\rangle = \hbar m \left|lm\right\rangle$$

$$L_\pm \left|lm\right\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\left|l\ m\pm 1\right\rangle$$

a) Bestimmen Sie für $l=\frac{1}{2}$ und $l=1$ die Matrizen von L_z und $L_\pm$ bezüglich der Basis

$$\left\{\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle,\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\right\}$$

bzw.

$$\left\{\left|11\right\rangle,\left|10\right\rangle,\left|1-1\right\rangle\right\}$$

b) Wie sehen dann die jeweils zugehörigen Matrizen L_x und L_y aus?

2. Hamilton Operator des Wasserstoffatoms - 7 P.

Zur quantenmechanischen Beschreibung des Wasserstoffatoms wird der Einteilchen-Hamiltonoperator $H = \mathbf{p}^2/2\mu - e^2/r$ verwendet. Welche Bedeutung haben $\mathbf{p}$, μ und r? Geben Sie zwei physikalische Eigenschaften realer Wasserstoffatome an, die durch H nicht berücksichtigt werden. Ψ_{nlm} sei nun ein Eigenzustand, der das Wasserstoffatom beschreibt. Was besagen die Quantenzahlen n, l und m und welche Werte können sie jeweils annehmen?

3. Messung am Wasserstoffatom - 7 P.

Zum Zeitpunkt $t = 0_-$ (d.h instantan vor dem Zeitpunkt $t = 0$) sei ein ruhendes Wasserstoffatom in einem durch die Wellenfunktion

$$\Psi_0 = \frac{z}{27a}\left(1-\frac{r+x}{6a}\right)e^{-r/3a} + \left(\frac{x}{4\sqrt{2}a}+1-\frac{r}{2a}+e^{-r/2a}\right)e^{-r/2a}$$

beschriebenen Zustand.

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Messung des Drehimpulsquadrates $\mathbf{L}^2$ durchgeführt und der Messwert $2\hbar^2$ gefunden. Wie sieht die normierte Wellenfunktion $\Psi_1(x)$ direkt nach der Messung ($t = 0_+$) aus?

b) Für $t > 0$ werde nun eine Messung der Energie durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w_1(t)$, dabei einen Energiewert kleiner -3 eV zu finden?

4. Erzeuger und Vernichter - 6 P.

Der Besetzungszahloperator ist $N = a^\dagger a$, wobei $a^\dagger$ und a der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind. Berechnen Sie die Kommutatoren

$$\left[(a)^m, a^\dagger\right] \ , \ \left[a, \left(a^\dagger\right)^m\right] \quad \text{und} \quad [N, (a)^m]$$

5. Zeitentwicklung eines Zweizustandsystems - 6 P.

Ein Teilchen befinde sich in einem Kasten, der durch eine dünne Wand in zwei Hälften geteilt wird. Im Zustand $|L\rangle$ bzw. $|R\rangle$ befinde es sich mit Sicherheit in der linken bzw. rechten Hälfte. Das Teilchen möge durch die Wand tunneln können, was durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben wird:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega \left(|L\rangle \langle R| + |R\rangle \langle L|\right)$$

Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände von $\mathcal{H}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Teilchen in der rechten Hälfte des Kastens. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, es zur Zeit $t > 0$ in der linken Hälfte vorzufinden?