

# Quantenmechanik I

FSU Jena - SS 08

Klausur 1

Juni 05, 2008

---

## 1. Verständnisfragen (3P)

Wie lautet die Unschärferelation für Ort  $x$  und Impuls  $p$  und was besagt sie?

Was besagt der Hamilton Operator eines Teilchens?

Ist die Wellenfunktion  $\psi(x, t)$  direkt messbar?

## 2. Pauli-Matrizen (4P)

Die Pauli-Matrizen sind

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie die Eigenwerte und normierte Eigenvektoren von  $\sigma_2$
- Berechnen Sie den Kommutator  $[\sigma_1, \sigma_2]$  und schreiben Sie ihn als Linearkombination der  $\sigma_i$ .

## 3. Kommutatoren (4P)

Gegeben sei der Hamilton Operator

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}P^2 + V(X)$$

- Bestimmen Sie  $[X, P]$  unter Benutzung der Ortsdarstellung von  $P$  und  $X$ .
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $P, X$  und  $V(X)$  die Kommutatoren  $[P, H]$ ,  $[X, H]$  und  $[XP, H]$  ohne Verwendung der Ortsdarstellung.

## 4. Orthogonale Eigenvektoren (2P)

Zeigen Sie, dass zwei beliebige Eigenvektoren  $|\varphi_n\rangle$  und  $|\varphi_m\rangle$  eines selbstadjungierten Operators  $A$  zu zwei verschiedenen Eigenwerten  $a_n$  und  $a_m$  orthogonal zu einander sind.

## 5 Wellenfunktion (6P)

Bei einem eindimensionalen Problem sei einem Teilchen die Wellenfunktion

$$\varphi(x) = N \frac{e^{ip_0x/\hbar}}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

zugeordnet, wobei  $a$  und  $p_0$  reelle Konstanten und  $N$  ein Normierungsfaktor sind. Das Skalarprodukt ist

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^*(x) \varphi_2(x) dx$$

- Man bestimme  $N$  so, dass  $\varphi$  auf 1 normiert ist.

- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Ortsmessung das Ergebnis zwischen  $-\frac{a}{\sqrt{3}}$  und  $\frac{a}{\sqrt{3}}$  liegt?
- c) Man berechne den Impulserwartungswert des Teilchens.

**Hinweis:** Es ist

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

## 6. Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf II (5P)

Ein Teilchen der Masse  $m$  befinde sich in einem unendlich hohen Potentialtopf, dessen Wände bei  $x = 0$  und  $x = a$  liegen, das heißt

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : 0 < x < a \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases}$$

Zur Zeit  $t = t_0$  werde es durch die auf eins normierte Wellenfunktion

$$\varphi(x) = \frac{10}{\sqrt{5a}} \sin \frac{\pi x}{a} - \frac{12}{\sqrt{5a}} \sin^3 \frac{\pi x}{a}$$

beschrieben.

Welche Ergebnisse können bei einer Messung der Energie des Teilchens auftreten? Wie groß sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten?

**Hinweis:** Bestimmen Sie die Eigenfunktionen des Hamilton Operators und entwickeln Sie  $\varphi(x)$  nach diesen. Es gilt:

$$\int_0^{y_0} \sin^2 y dy = \frac{y_0}{2} - \frac{1}{4} \sin 2y_0$$

und

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$