

Quantenmechanik I

FSU Jena - SS 08

Klausur 1

Juni 05, 2008

1. Verständnisfragen (3P)

Wie lautet die Unschärferelation für Ort x und Impuls p und was besagt sie?

Was besagt der Hamilton Operator eines Teilchens?

Ist die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ direkt messbar?

2. Pauli-Matrizen (4P)

Die Pauli-Matrizen sind

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie die Eigenwerte und normierte Eigenvektoren von σ_2
- Berechnen Sie den Kommutator $[\sigma_1, \sigma_2]$ und schreiben Sie ihn als Linearkombination der σ_i .

3. Kommutatoren (4P)

Gegeben sei der Hamilton Operator

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}P^2 + V(X)$$

- Bestimmen Sie $[X, P]$ unter Benutzung der Ortsdarstellung von P und X .
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von P, X und $V(X)$ die Kommutatoren $[P, H]$, $[X, H]$ und $[XP, H]$ ohne Verwendung der Ortsdarstellung.

4. Orthogonale Eigenvektoren (2P)

Zeigen Sie, dass zwei beliebige Eigenvektoren $|\varphi_n\rangle$ und $|\varphi_m\rangle$ eines selbstadjungierten Operators A zu zwei verschiedenen Eigenwerten a_n und a_m orthogonal zu einander sind.

5 Wellenfunktion (6P)

Bei einem eindimensionalen Problem sei einem Teilchen die Wellenfunktion

$$\varphi(x) = N \frac{e^{ip_0x/\hbar}}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

zugeordnet, wobei a und p_0 reelle Konstanten und N ein Normierungsfaktor sind. Das Skalarprodukt ist

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^*(x) \varphi_2(x) dx$$

- Man bestimme N so, dass φ auf 1 normiert ist.

- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Ortsmessung das Ergebnis zwischen $-\frac{a}{\sqrt{3}}$ und $\frac{a}{\sqrt{3}}$ liegt?
- c) Man berechne den Impulserwartungswert des Teilchens.

Hinweis: Es ist

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

6. Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf II (5P)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem unendlich hohen Potentialtopf, dessen Wände bei $x = 0$ und $x = a$ liegen, das heißt

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : 0 < x < a \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases}$$

Zur Zeit $t = t_0$ werde es durch die auf eins normierte Wellenfunktion

$$\varphi(x) = \frac{10}{\sqrt{5a}} \sin \frac{\pi x}{a} - \frac{12}{\sqrt{5a}} \sin^3 \frac{\pi x}{a}$$

beschrieben.

Welche Ergebnisse können bei einer Messung der Energie des Teilchens auftreten? Wie groß sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten?

Hinweis: Bestimmen Sie die Eigenfunktionen des Hamilton Operators und entwickeln Sie $\varphi(x)$ nach diesen. Es gilt:

$$\int_0^{y_0} \sin^2 y dy = \frac{y_0}{2} - \frac{1}{4} \sin 2y_0$$

und

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$