Klausur 2 zur Quantenmechanik I – SS 2007

(1) Spektren von Hamilton-Operatoren **4 P.**

Geben Sie jeweils einen Hamilton-Operator mit einem rein diskreten, einem rein kontinuierlichen und einem gemischten Spektrum an.

(2) Drehinvarianz **4 P.**

Berechnen Sie die Kommutatoren $[L_i\,, \vec{r}^{\,2}]$ mit $i = 1, 2, 3$ und erklären Sie das Ergebnis.

(3) Zeitentwicklung eines Zweizustandsystems **6 P.**

Ein Teilchen befinde sich in einem Kasten, der durch eine dünne Wand in zwei Hälften geteilt wird. Im Zustand $|L\rangle$ ($|R\rangle$) befinde es sich mit Sicherheit in der linken (rechten) Hälfte. Das Teilchen möge durch die Wand tunneln können, was durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben wird:

$$H = \hbar\omega\big(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|\big) \ .$$

Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände von H. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Teilchen in der rechten Hälfte des Kastens. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, es zur Zeit $t > 0$ in der linken Hälfte vorzufinden?

(4) Kohärente Zustände **7 P.**

Bis auf Normierung ist ein kohärenter Zustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators durch $|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ gegeben. Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle\alpha|\beta\rangle$ zweier kohärenter Zustände sowie den Erwartungswert und das Schwankungsquadrat des Besetzungszahloperators $N = a^\dagger a$ im Zustand $|\alpha\rangle$.

(5) Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms **5 P.**

Zur quantenmechanischen Beschreibung des Wasserstoffatoms wurde in der Vorlesung der Einteilchen-Hamilton-Operator $H = \vec{p}^{\,2}/2m - e^2/r$ verwendet. Welche Bedeutung haben $\vec{p}$, m und r? Geben Sie zwei physikalische Eigenschaften realer Wasserstoffatome an, die durch H nicht berücksichtigt werden.

(6) Rotationssymmetrisches Kastenpotential **7 P.**

Ein Teilchen möge sich nur zwischen zwei konzentrischen Kugelschalen mit Radien $r = a > 0$ und $r = b > a$ aufhalten können:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{für } a < r < b \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Machen Sie für die Ortswellenfunktion den Separationsansatz $\psi(\vec{r}) = r^{-1} f(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$ und reduzieren Sie damit die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung auf eine Differentialgleichung für $f(r)$. Für den Grundzustand (welche Drehimpulsquantenzahlen ℓ und m trägt dieser?) vereinfacht sich die Gleichung derart, daß Sie sie leicht lösen können. Bestimmen Sie die zugehörige Grundzustandsenergie.

(7) Relativistischer Oszillator **7 P.**

Die kinetische Energie des eindimensionalen relativistischen harmonischen Oszillators ist durch $T = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} - mc^2$ gegeben. Bestimmen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Änderung der Energieniveaus durch die führende relativistische Korrektur zum nichtrelativistischen Oszillator.

Nützliche Formeln:

$$\vec{p}^{\,2} = -\frac{\hbar^2}{r}\,\partial_r^2\, r + \frac{1}{r^2}\,\vec{L}^2$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\ , \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\ , \quad |n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle$$

$$[A\,,[A\,,B]] = [B\,,[A\,,B]] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A\,,B]} = \mathrm{e}^B\,\mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^{[A\,,B]}$$

$$p = \frac{p_0}{2\mathrm{i}}\,(a - a^\dagger) \ \text{ mit } \ p_0 = \sqrt{2m\hbar\omega}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)$$

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!