Quantenmechanik I

FSU Jena - SS 07

Klausur 1

Juni 2007

0.1 Ein unitärer Operator (4 P.)

Die Zustände $|n\rangle$ mit $n = 1, .., N$ mögen eine Orthonormalbasis eines N-dimensionalen Hilbertraums bilden, wobei periodische Randbedingungen gelten sollen, das heißt $|N+1\rangle \equiv |1\rangle$ und $|0\rangle \equiv |N\rangle$. Zeigen Sie dass der Operator

$$A = \sum_{n=1}^{N} |n\rangle \langle n+1|$$

unitär ist, geben Sie seine Matrixdarstellung bezüglich der Basis $\{|n\rangle\}$ an, und bestimmen Sie für $N = 3$ seine Eigenwerte.
Achtung: A ist nicht selbstadjungiert. Was bedeutet dies für seine Eigenwerte?

0.2 Tunneleffekt (6 P.)

Ein (durch eine ebene stationäre Welle zu beschreibendes) Teilchen der Masse m und Energie E trifft von $x = -\infty$ kommend auf die Potentialbarriere $V(x) = V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$. Bestimmen und skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeit $T(E)$ dafür, dass das Teilchen diese durchtunnelt.

0.3 Zeitentwicklung von $(\Delta X)^2$ (4 P.)

Der Hamilton-Operator eines Teilchens in einer Dimension sei $H = P^2/2m + V(X)$. Zeigen Sie für das Schwankungsquadrat des Ortsoperators in einem beliebigen Zustand $|\psi(t)\rangle$, dass

$$m\partial_t(\Delta X)^2 = (PX + XP) - 2\langle X\rangle \langle P\rangle$$

0.4 Ein stationärer Zustand (4 P.)

Die Ortsraumwellenfunktion eines Teilchens laute $\psi(\vec{r}, t) = Ne^{-r^2/2a^2 - i\hbar t/2ma^2}$ mit $a^2 = \hbar/m\omega$. Bestimmen Sie das Potential $V(\vec{r})$, in dem es sich befindet.

0.5 Eine Summenregel (4. P)

Der Hamilton-Operator $H = P^2/2m + V(X)$ besitze ein rein diskretes Spektrum: $H|n\rangle = E_n|n\rangle$. Drücken Sie, ausgehend von dem zu bestimmenden Kommutator $[H, X]$, die Matrixelemente $\langle n'| P |n\rangle$ durch die $\langle n'| X |n\rangle$ aus, und beweisen Sie damit die Summenregel

$$\frac{\hbar^2}{m^2} \langle n| P^2 |n\rangle = \sum_{n'} (E_{n'} - E_n)^2 |\langle n'| X |n\rangle|^2$$

0.6 Eine Identität für Pauli-Matrizen (3 P.)

Die Pauli-Matrizen σ_1, σ_2 und σ_3 erfüllen die (Anti-) Vertauschungsrelationen

$$\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \ , \ \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} I$$

wobei über doppelt vorkommende Indizes summiert wird. Zeigen Sie, dass

$$\left(\vec{A} \cdot \vec{\sigma}\right)\left(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} I + i\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \sigma$$

0.7 Messprozess (5 P.)

Betrachten Sie ein quantenmechanisches System, das durch einen zeitunabhängigen Hamilton-Operator H beschrieben wird. Zum Zeitpunkt t_0 befinde sich das System im Zustand $|\psi(t_0)\rangle$. Zeigen Sie, dass

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} |\psi(t_0)\rangle$$

die Schrödinger-Gleichung löst.
Zum Zeitpunkt $t_1 > t_0$ werde eine Messung der Observablen A, welche rein diskrete und unter Umständen entartete Eigenwerte habe, vorgenommen, die das Resultat a_n liefert. Geben Sie in Form einer Gleichung den Zusammenhang zwischen dem Zustand des Systems $|\psi(t_2)\rangle$ zu einem Zeitpunkt $t_2 > t_1$ und dem Anfangszustand $|\psi(t_0)\rangle$ an, und erläutern Sie kurz in Worten die Evolution des Zustandes vor, während und nach der Messung.