Quantenmechanik II
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 13 - Lösungen

Stilianos Louca

14. Februar 2010

Aufgabe 22

(a) Beginnend mit den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

erhält man

$$0 = \frac{d}{dt}\overbrace{\left[\frac{m_0\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\mathbf{A}\right]}^{\partial_{\dot{\mathbf{x}}}\mathcal{L}} - \overbrace{q\left[\operatorname{grad}(\dot{\mathbf{x}}\mathbf{A}) - \operatorname{grad}\Phi\right]}^{\partial_{\mathbf{x}}\mathcal{L}} = \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}}) + q\overbrace{\left[(\dot{\mathbf{x}}\operatorname{grad})\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right]}^{\frac{d\mathbf{A}}{dt}} - q\left[\operatorname{grad}(\dot{\mathbf{x}}\mathbf{A}) - \operatorname{grad}\Phi\right]$$

$$= \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}}) + q\underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{grad}\Phi\right]}_{-\mathbf{E}} - q\underbrace{\left[\operatorname{grad}(\dot{\mathbf{x}}\mathbf{A}) - (\dot{\mathbf{x}}\operatorname{grad})\mathbf{A}\right]}_{\dot{\mathbf{x}}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}}$$

$$= \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}}) - q\left(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{B}\right)$$

was zu zeigen war.

(b) Der Hamiltonian $H(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ ist definiert als Legendre-Transformation des Lagrangian bzgl. $\dot{\mathbf{x}}$, wobei

$$\mathbf{p} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}} + q\mathbf{A}$$

Durch Umstellung nach $m\dot{\mathbf{x}}$ und Quadrierung erhält man

$$\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2 - \dot{\mathbf{x}}^2} = \frac{(\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2}{m_0^2c^2}$$

bzw.

$$1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2} = \frac{m_0^2c^2}{m_0^2c^2 + (\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2} \tag{0.1}$$

Schließlich

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \dot{\mathbf{x}}\mathbf{p} - \mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t) = m\dot{\mathbf{x}}^2 + \cancel{q\dot{\mathbf{x}}\mathbf{A}} + m_0c^2\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} - \cancel{q\dot{\mathbf{x}}\mathbf{A}} + q\Phi = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}}} + q\Phi \tag{0.2}$$

bzw. mit (0.1)

$$\boxed{H(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \sqrt{m_0^2c^4 + (\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2\,c^2} + q\Phi} \tag{0.3}$$

(c) Im nicht-relativistischen Grenzfall $\|\dot{\mathbf{x}}\| \ll c$, das heißt

$$\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} \approx 1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2c^2} \quad , \quad m \approx m_0$$

ergibt sich der Lagrangian als

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t) \approx -m_0c^2 + \frac{m_0}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + q\dot{\mathbf{x}}\mathbf{A} - q\Phi \tag{0.4}$$

bzw. der Hamiltonian als

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p},t) \approx m_0c^2\left[1+\frac{(\overbrace{\mathbf{p}-q\mathbf{A}}^{\approx m_0\dot{\mathbf{x}}})^2}{2m_0^2c^2}\right] + q\Phi \approx m_0c^2 + \frac{m_0}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + q\Phi \tag{0.5}$$

was genau der Energie eines nicht-relativistischen Teilchens im elektrischen Feld $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ entspricht.

Aufgabe 23

a) Ausgehend von den Definitionen

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} := \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A} \quad , \quad \hat{\mathbf{v}} := c\hat{\boldsymbol{\alpha}}$$

notieren wir zunächst die Kommutatoren

$$\left[\hat{\boldsymbol{\pi}}, \hat{\beta}\right] = 0$$

$$[\hat{\boldsymbol{\pi}}, \Phi] = [\hat{\mathbf{p}}, \Phi] - q\underbrace{[\mathbf{A}, \Phi]}_{0} = \frac{\hbar}{i}(\nabla\Phi)$$

$$[\pi_j, \pi_k] = \underbrace{[\hat{p}_j, \hat{p}_k]}_{0} + q^2\underbrace{[A_j, A_k]}_{0} - q\underbrace{[\hat{p}_j, A_k]}_{\frac{\hbar}{i}(\partial_j A_k)} - q\underbrace{[A_j, \hat{p}_k]}_{-\frac{\hbar}{i}(\partial_k A_j)} = q\frac{\hbar}{i}\left(\partial_k A_j - \partial_j A_k\right)$$

$$\Rightarrow \quad [\hat{\boldsymbol{\pi}}, \hat{\mathbf{v}}\hat{\boldsymbol{\pi}}] = \hat{\mathrm{v}}^k\left[\hat{\boldsymbol{\pi}}, \hat{\pi}_k\right] = \hat{\mathrm{v}}^k q\frac{\hbar}{i}\left(\partial_k\mathbf{A} - \nabla A_k\right) = q\frac{\hbar}{i}\left[(\hat{\mathbf{v}}\nabla)\mathbf{A} - \nabla(\hat{\mathbf{v}}\mathbf{A})\right] = -q\frac{\hbar}{i}\hat{\mathbf{v}} \times \operatorname{rot}\mathbf{A}$$

Der Hamiltonian der Dirac-Theorie für ein relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld ist im Schrödinger-Bild gegeben durch

$$\hat{H} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) + \hat{\beta}m_0c^2 + q\Phi = \hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}} + \hat{\beta}m_0c^2 + q\Phi$$

Ist $U = U(t,t_0)$ der entsprechende Propagationsoperator, so erhält man im Heisenberg-Bild für $\hat{\boldsymbol{\pi}}_H$ die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\pi}}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}U^\dagger\left[\hat{\boldsymbol{\pi}}, \hat{H}\right]U + U^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\pi}}{\partial t}U = \frac{1}{i\hbar}\left\{[\hat{\boldsymbol{\pi}}, \hat{\mathbf{v}}\hat{\boldsymbol{\pi}}] + m_0c^2\left[\hat{\boldsymbol{\pi}}, \hat{\beta}\right] + q\left[\hat{\boldsymbol{\pi}}, \Phi\right] - i\hbar q\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right\}_H$$

$$= q\left[\hat{\mathbf{v}} \times \operatorname{rot}\mathbf{A} - (\nabla\Phi) - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right]_H = q\left[\mathbf{E} + \hat{\mathbf{v}} \times \operatorname{rot}\mathbf{A}\right]_H = q\left[\mathbf{E}_H + \hat{\mathbf{v}} \times \operatorname{rot}\mathbf{A}_H\right]$$

b) Ausgehend von der Definition

$$\hat{m} := \frac{1}{c^2}\left(\hat{H} - q\Phi\right) = \frac{1}{c^2}\hat{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\pi} + \hat{\beta}m_0$$

und den Eigenschaften

$$\left[\hat{\alpha}^j, \hat{\alpha}^k\right]_+ = 2\delta^{jk}$$

$$\left[\hat{\alpha}^j, \hat{\beta}\right]_+ = 0$$

$$\hat{\beta}^2 = 1$$

lässt sich schreiben

$$[\hat{\mathbf{v}}, \hat{m}]_+ = \frac{1}{c^2}\left[\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}\hat{\boldsymbol{\pi}}\right] + m_0 \underbrace{\left[\hat{\mathbf{v}}, \hat{\beta}\right]}_{0} = [\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}\hat{\boldsymbol{\pi}}] = \left[\hat{\alpha}^k, \hat{\alpha}^j\hat{\pi}_j\right]\mathbf{e}_k$$

$$= \left[\hat{\alpha}^k\hat{\alpha}^j\hat{\pi}_j + \hat{\alpha}^j \underbrace{\hat{\pi}_j\hat{\alpha}^k}_{\hat{\alpha}^k\hat{\pi}_j}\right]\mathbf{e}_k = \underbrace{\left[\hat{\alpha}^k, \hat{\alpha}^j\right]}_{2\delta^{kj}}\hat{\pi}_j\mathbf{e}_k = 2\hat{\pi}_k\mathbf{e}^k = 2\hat{\boldsymbol{\pi}}$$

was zu zeigen war.