Quantenmechanik II
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

13. Februar 2010

Aufgabe 18

Eigenzustände des gestörten harmonischen Oszillators

Besitzt der Oszillator die *Ladung* q und Grundfrequenz ω so ist dessen Hamiltonian gegeben durch

$$\hat{H}_F = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \omega^2 \frac{m}{2} \hat{X}^2 - qF\hat{X} \tag{0.1}$$

wobei F die Projektion des elektrischen Feldes *in Richtung* des Oszillators ist. Umgeschrieben:

$$\hat{H}_F = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \omega^2 \frac{m}{2} \left(\hat{X} - \frac{qF}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{q^2 F^2}{2m\omega^2} \tag{0.2}$$

Substituiert man

$$\hat{Y} := \hat{X} - \frac{qF}{m\omega^2} \quad , \quad y := x - \underbrace{\frac{qF}{m\omega^2}}_{=:x_0} \tag{0.3}$$

so nimmt $\hat{H}_F$ in y-Ortsdarstellung die Form

$$\hat{H}_F \cong -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_y^2 + \omega^2 \frac{m}{2} y^2 - \frac{q^2 F^2}{2m\omega^2} \tag{0.4}$$

an. Bekanntlich ergeben sich dann die Eigenzustände $\{\psi_F^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ von $\hat{H}_F$ durch[1]

$$\psi_F^n(x) := \left\langle \delta^{\hat{X}}(x), \psi_F^n \right\rangle = \left\langle \delta^{\hat{Y}}(x - x_0), \psi_F^n \right\rangle = \left\langle \delta^{\hat{X}}(x - x_0), \psi_0^n \right\rangle = \psi_0^n\,(x - x_0) \tag{0.5}$$

(vgl. Verschiebung des *Gleichgewichtspunktes* um $x_0 = qF/(m\omega^2)$) wobei $\{\psi_0^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Eigenzustände des ungestörten Hamiltonians $\hat{H}_0$ und $\left\{\delta^{\hat{Y}}(z)\right\}_{z\in\mathbb{R}}$ bzw. $\left\{\delta^{\hat{X}}(z)\right\}_{z\in\mathbb{R}}$ die Eigenzustände von $\hat{Y}$ bzw. $\hat{X}$ seien[2]. Ferner sind die entsprechenden Energieeigenwerte $\{E_F^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ von $\hat{H}_F$ gegeben durch

$$E_F^n = E_0^n - \frac{q^2 F^2}{2m\omega^2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{0.6}$$

mit den Energieeigenwerten $\{E_0^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ des ungestörten Hamiltonians.

---

[1] Beachte dass die Konstante $-\frac{q^2F^2}{2m\omega^2}$ zwar keinerlei Einfluss auf die Eigenzustände hat, jedoch sehr wohl auf deren Eigenwerte.

[2] Sprich: $\hat{X}\delta^{\hat{X}}(z) = z\delta^{\hat{X}}(z)$, $\hat{Y}\delta^{\hat{Y}}(z) = z\delta^{\hat{Y}}(z)$. Dabei besteht der Zusammenhang $\delta^{\hat{X}}(x) = \delta^{\hat{Y}}\left(x - \frac{qF}{m\omega^2}\right) = \delta^{\hat{Y}}(y)$.

Überlappungwahrscheinlichkeiten

Die (normierten) Eigenzustände des ungestörten harmonischen Oszillators sind gegeben durch

$$\psi_0^n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \cdot H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot x\right) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{0.7}$$

mit den Hermite-Polynomen

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{0.8}$$

Der Oszillator befinde sich vor Einstellung des Feldes im stationären Grundzustand ψ_0^0. Durch Einschalten des Feldes ändern sich plötzlich dessen stationäre Zustände gemäß (0.5). Die Wahrscheinlichkeit ihn nun im stationären Zustand ψ_F^n einzutreffen, ist daher gegeben durch $W_{0\to n} = \left|\langle \psi_F^n, \psi_0^0 \rangle\right|^2$. Mit

$$\begin{aligned}
\langle \psi_F^n, \psi_0^0 \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \psi_F^{n*}(x) \cdot \psi_0^0(x)\ dx \overset{(0.5)}{=} \int_{\mathbb{R}} \psi_0^{n*}\left(x - x_0\right)\ \psi_0^0(x)\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left((x-x_0)^2 + x^2\right)} H_n\left(\sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}} \cdot (x - x_0)\right) \cdot \underbrace{H_0\left(\sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}} \cdot x\right)}_{1}\ dx \\
&= \frac{e^{-u_0^2}}{\sqrt{2^n n! \pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} H_n\left(u - u_0\right)\ du \qquad \Bigg| \qquad \text{Sub.: } u := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot \left(x - \tfrac{x_0}{2}\right)\ ,\ u_0 := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot \frac{x_0}{2} \\
&\overset{(0.10)}{=} \frac{e^{-u_0^2}}{\sqrt{2^n n! \pi}} \sum_{k=0}^{n} (-2u_0)^{n-k} \binom{n}{k} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} H_k(u)\ du}_{\substack{\sqrt{\pi}\cdot\delta_{k0} \\ \text{nach } (0.11)}} = \frac{e^{-u_0^2}}{\sqrt{2^n n!}} (-2u_0)^n
\end{aligned}$$

ergibt sich[3]

$$\boxed{W_{0\to n} = \frac{x_0^{2n}}{n!} \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^n \cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} \cdot x_0^2} = \frac{1}{n!} e^{-\frac{q^2 F^2}{2\hbar m\omega^3}} \cdot \left(\frac{q^2 F^2}{2\hbar m\omega^3}\right)^n} \tag{0.9}$$

wobei verwendet wurde

$$H_n(\alpha + \beta) = \sum_{k=0}^{n} (2\beta)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot H_k(\alpha) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{0.10}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} H_n(u) H_k(u)\ du = n! 2^n \sqrt{\pi} \cdot \delta_{nk} \quad , \quad n, k \in \mathbb{N}_0 \tag{0.11}$$

[3] Vergleiche: Poissonverteilung.