Quantenmechanik II
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

November 25, 2009

Aufgabe 10

Hilfsaussage 01

Es gilt

$$\hat{a}_j(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j} = n_j \cdot (\hat{a}_j^\dagger)^{n_j-1} + (\pm 1)^{n_j}(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j}\hat{a}_j \tag{0.1}$$

Dabei sei das obere für Bosonen ($n_j \in \mathbb{N}_0$), das untere für Fermionen ($n_j \in \{0,1\}$) gedacht.

Beweis: Aus $\hat{a}_j\hat{a}_j^\dagger = 1 \pm \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j$ folgt direkt im bosonischen Fall

$$\hat{a}_j(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j} = (\hat{a}_j^\dagger)^{n_j-1} + \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j-1} = (..) = n_j \cdot (\hat{a}_j^\dagger)^{n_j-1} + (\hat{a}_j^\dagger)^{n_j}\hat{a}_j$$

und im fermionischen Fall

$$\hat{a}_j(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j} = \left\{ \begin{array}{ll} \hat{a}_j & : n_j = 0 \\ 1 - \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j & : n_j = 1 \end{array} \right\} = n_j \cdot (\hat{a}_j^\dagger)^{n_j-1} + (-1)^{n_j}(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j}\hat{a}_j$$

Hilfsaussage 02

Es gilt

$$\hat{a}_j\,|n_N,\dots,n_0\rangle = (\pm 1)^{N-j}\sqrt{n_j} \cdot |n_N,\dots,(n_j-1),\dots,n_0\rangle \tag{0.2}$$

und

$$\hat{a}_j^\dagger\,|n_N,\dots,n_0\rangle = (\pm 1)^{N-j}\sqrt{n_j+1} \cdot |n_N,\dots,(n_j+1),\dots,n_0\rangle \tag{0.3}$$

wobei oberes bzw. unteres Vorzeichen für Bosonen bzw. Fermionen gelte. Dabei gelte die Konvention

$$|n_0,\dots,n_j \leq -1,\dots,n_N\rangle =: 0$$

$$|n_0,\dots,n_j \geq 2,\dots,n_N\rangle =: 0 \qquad \text{(für Fermionen)}$$

Beweis: Folgt direkt aus (0.1) und der Definition

$$|\mathbf{n}\rangle := |n_0,n_1,\dots,n_N\rangle := \frac{(\hat{a}_N^\dagger)^{n_N}}{\sqrt{n_N!}}\cdots\frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\frac{(\hat{a}_0^\dagger)^{n_0}}{\sqrt{n_0!}}\,|0\rangle \quad , \quad \begin{cases} \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^N & : \text{ Bosonen} \\ \mathbf{n} \in \{0,1\}^N & : \text{ Fermionen} \end{cases}$$

Beweis der Behauptung

Beginnend mit der Definition

$$\hat{\psi}(\xi) := \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(\xi) \cdot \hat{a}_i$$

schreiben wir

$$\langle \mathbf{n} | \, \hat{\psi}^\dagger(\xi)\hat{\psi}(\xi) \, | \mathbf{n} \rangle = \sum_{i,j=0}^{\infty} \varphi_i^*(\xi)\varphi_j(\xi) \, \langle n_0 \dots n_N | \, \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \, | n_0 \dots n_N \rangle$$

$$\overset{(0.2)}{\underset{}{\overset{(0.3)}{=}}} \sum_{i,j=0}^{\infty} (\pm 1)^{N-i} (\pm 1)^{N-j} \varphi_i^*(\xi)\varphi_j(\xi) \cdot \underbrace{\sqrt{n_j n_i} \, \langle n_0, \dots, (n_i - 1), \dots, n_N \, | n_0, \dots, (n_j - 1), \dots, n_N \rangle}_{n_i \delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{(\pm 1)^{2N-2i}}_{1} n_i \varphi_i^*(\xi)\varphi_i(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} n_i \, |\varphi_i(\xi)|^2$$

$\square$

Aufgabe 11

Beginnend mit der Identität

$$\hat{B} = \int d\xi \; \hat{\psi}^\dagger(\xi) \underbrace{\hat{b}}_{\substack{\text{in } \xi- \\ \text{Darstellung}}} \hat{\psi}(\xi) \quad , \quad \xi := (\mathbf{y}, m)$$

für Operatoren der Form

$$\hat{B} = \sum_n \hat{b}_n := \sum_n 1 \times \dots \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{\hat{b}} \otimes \dots \quad , \quad \hat{b}: \text{ 1-Teilchen Operator}$$

schreiben wir

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \sum_{m_s=-s}^{s} \frac{-i\hbar}{2m} \int d\mathbf{y} \; \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y}, m_s) \Big[\nabla_{\mathbf{y}} \Big(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{\psi}(\mathbf{y}, m_s) \Big) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\psi}(\mathbf{y}, m_s) \Big]$$

$$= \sum_{m_s=-s}^{s} \frac{-i\hbar}{2m} \int d\mathbf{y} \; \Big[- \big(\nabla_{\mathbf{y}} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y}, m_s) \big) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{\psi}(\mathbf{y}, m_s) + \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y}, m_s) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\psi}(\mathbf{y}, m_s) \Big]$$

$$= \sum_{m_s=-s}^{s} \frac{-i\hbar}{2m} \Big[- \big(\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, m_s) \big) \hat{\psi}(\mathbf{x}, m_s) + \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, m_s) \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\psi}(\mathbf{x}, m_s) \Big]$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \sum_{m_s=-s}^{s} \Big[\big(\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, m_s) \big) \hat{\psi}(\mathbf{x}, m_s) - \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, m_s) \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\psi}(\mathbf{x}, m_s) \Big]$$

wobei Definitionsgemäß

$$\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\psi}(\mathbf{x}, m_s) := \sum_j \left[\nabla_{\mathbf{x}} \varphi_j(\mathbf{x}, m_s) \right] \cdot \hat{a}_j$$

Bemerkung: Man beachte die Ähnlichkeit des Ausdrucks zur *klassischen* Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} \left[(\nabla \psi^*) \psi - \psi^* (\nabla \psi) \right]$$