Quantenmechanik II
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

November 15, 2009

Aufgabe 07

Beginnend mit den die Operatoren $a_i, a_i^\dagger$ charakterisierenden Eigenschaften

$$\{a_i, a_j\} = 0 = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} \quad , \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij} \tag{0.1}$$

und

$$a_i |0\rangle = 0 \quad , \quad |n_0 n_1 \dots n_N\rangle = (a_N^\dagger)^{n_N} \dots (a_0^\dagger)^{n_0} |0\rangle$$

bzw. speziell

$$a_i^\dagger |n_0 \dots n_N\rangle = (1-n_i) \cdot (-1)^{n_{i+1}+..+n_N} |n_0, .., n_{i-1}, 1, n_{i+1}, .., n_N\rangle$$

$$a_i |n_0 \dots n_N\rangle = n_i \cdot (-1)^{n_{i+1}+..+n_N} |n_0, .., n_{i-1}, 0, n_{i+1}, .., n_N\rangle$$

lesen wir die Darstellung der $a_0, a_0^\dagger, a_1, a_1^\dagger$ in der Basis $|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle$ ab:

$$a_0 \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a_0^\dagger \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a_1^\dagger \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie erwartet, entspricht die Darstellung der $a_i^\dagger$ genau der Darstellung der adjungierten a_i (transponiert, komplex konjugiert). Die Vertauschungsrelationen (0.1) verifizieren sich ebenfalls durch direkte Multiplikation der Matrizen, z.B.

$$a_0 a_1^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -a_1^\dagger a_0 \qquad a_0^\dagger a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -a_1 a_0^\dagger$$

$$a_0 a_0^\dagger + a_0^\dagger a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Aufgabe 08

Schreiben $[\cdot,\cdot]_+$ bzw. $[\cdot,\cdot]_-$ für den Antikommutator bzw. Kommutator im Falle von Fermionen bzw. Bosonen. Beginnend mit den Definitionen

$$\hat{\Psi}(\xi) := \sum_{i\in I} \varphi_i(\xi)\cdot a_i \qquad \hat{\Psi}^\dagger(\xi) := \sum_{i\in I} \varphi_i^*(\xi)\cdot a_i^\dagger$$

wobei $(\varphi_i)_{i\in I}$ ein VONS in $\mathcal{H}_1$ sei, schreiben wir

$$\left[\hat{\Psi}(\xi),\hat{\Psi}(\eta)\right]_\pm = \sum_{i,j\in I} \varphi_i(\xi)\varphi_j(\eta)\underbrace{[a_i,a_j]_\pm}_{0} = 0$$

$$\left[\hat{\Psi}^\dagger(\xi),\hat{\Psi}^\dagger(\eta)\right]_\pm = \sum_{i,j\in I} \varphi_i^*(\xi)\varphi_j^*(\eta)\underbrace{\left[a_i^\dagger,a_j^\dagger\right]_\pm}_{0} = 0$$

$$\left[\hat{\Psi}(\xi),\hat{\Psi}^\dagger(\eta)\right]_\pm = \sum_{i,j\in I} \varphi_i(\xi)\varphi_j^*(\eta)\underbrace{\left[a_i,a_j^\dagger\right]_\pm}_{\delta_{ij}\hat{1}} = \sum_{i\in I}\varphi_i(\xi)\varphi_i^*(\eta)\cdot\hat{1}$$

Dabei gilt für beliebige $f\in\mathcal{H}_1$:

$$\int\sum_{i\in I}\varphi_i(\xi)\varphi_i^*(\eta)f(\eta)\;d\eta = \sum_{i\in I}\varphi_i(\xi)\underbrace{\int\varphi_i^*(\eta)f(\eta)\;d\eta}_{\langle\varphi_i,f\rangle} = \Bigg[\underbrace{\sum_{i\in I}\langle\varphi_i,f\rangle\cdot\varphi_i}_{\substack{f\\ \text{da }(\varphi_i)_{i\in I}\\ \text{VONS}}}\Bigg](\xi) = f(\xi)$$

das heißt

$$\sum_{i\in I}\varphi_i(\xi)\varphi_i^*(\eta) = \delta(\eta-\xi)$$

bzw.

$$\left[\hat{\Psi}(\xi),\hat{\Psi}^\dagger(\eta)\right]_\pm = \delta(\eta-\xi)\cdot\hat{1}$$

□

Aufgabe 09

In Ortsdarstellung wirkt der Operator $\hat{N}_V$ gemäß

$$(\hat{N}_V\psi)(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \int_V (\hat{\rho}(\mathbf{x})\psi)(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\;d^3\mathbf{x} = \int_V [\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)+\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)]\cdot\psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\;d^3\mathbf{x}$$

$$= \begin{cases} 2\psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) & : \{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}\subseteq V \\ \psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) & : \{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}\cap V\neq\emptyset \;\wedge\; \{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}\nsubseteq V \\ 0 & : \{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}\cap V=\emptyset \end{cases}$$

Offensichtlich kann $\hat{N}_V$ nur die Eigenwerte $\lambda\in\{0,1,2\}$ besitzen[1]. Ein Zustand ψ ist genau dann Eigenzustand zu:

$\lambda = 2$: falls $\psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = 0$ für $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}\nsubseteq V$.

[1] Der Ansatz $\hat{N}_V\psi = \lambda\psi$ führt bei $\lambda\notin\{0,1,2\}$ stets auf $\psi = 0$.

$\lambda = 1$: falls $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ für $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \subseteq V$ bzw. $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \cap V = \emptyset$.

$\lambda = 0$: falls $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ für $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \cap V \neq \emptyset$.

Jeder beliebiger Zustand ψ kann dargestellt werden gemäß

$$\psi = \psi_2 + \psi_1 + \psi_0$$

wobei

$$\psi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \begin{cases} \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & : \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \subseteq V \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\psi_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \begin{cases} \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & : \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \cap V \neq \emptyset \ \wedge \ \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \nsubseteq V \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\psi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \begin{cases} \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & : \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \cap V = \emptyset \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

jeweils Eigenvektoren zu den Eigenwerten $2, 1$ und 0 sind. Ist ψ normiert, so ergibt sich die *Messwahrscheinlichkeit* $\mathcal{P}_\lambda$ für den Eigenwert λ gemäß

$$\mathcal{P}_\lambda = \left\| \hat{P}_\lambda \psi \right\|^2 = \|\psi_\lambda\|^2$$

wobei $\hat{P}_\lambda$ die Orthogonalprojektion auf den λ-Eigenraum von $\hat{N}_V$ ist. Konkret:

$$\mathcal{P}_2 = \|\psi_2\|^2 = \int\limits_{V^2} |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 \ d^3\mathbf{x}_1 \ d^3\mathbf{x}_2$$

$$\mathcal{P}_1 = \|\psi_1\|^2 = \int\limits_{V \times V^c} |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 \ d^3\mathbf{x}_1 \ d^3\mathbf{x}_2 + \int\limits_{V^c \times V} |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 \ d^3\mathbf{x}_1 \ d^3\mathbf{x}_2$$

$$\mathcal{P}_0 = \|\psi_0\|^2 = \int\limits_{V^c \times V^c} |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 \ d^3\mathbf{x}_1 \ d^3\mathbf{x}_2$$