Übungen zur Quantenmechanik II – WS 2008/09 $\boxed{\text{H 13}}$

Abgabetermin: Donnerstag, 12.02.09

(29) Grundzustandswellenfunktion des relativistischen H-Atoms **7 P.**

Die Grundzustandsenergie des relativistischen Wasserstoffatoms mit Kernladungszahl Z ist zweifach entartet. Es sollen die zugehörigen Wellenfunktionen

$$\psi_{jm_jk}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} f(r)\,\xi^{\pm}_{jm_j} \\ g(r)\,\xi^{\mp}_{jm_j} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

bestimmt werden.

a) Wie lauten die Spinorharmonischen $\xi^{\pm}_{jm_j}$ für die den Grundzuständen zugeordneten Quantenzahlen?

b) Bestimmen Sie die Konstanten a, s_0 und c_{s_0} in den Grundzustandsradialfunktionen

$$f(r) = c_{s_0} r^{s_0-1} \mathrm{e}^{-ar} \ , \quad g(r) = \mathrm{i}\,\frac{1-s_0}{Z\alpha}\, f(r) \ .$$

Hinweis: $\int_0^\infty dt\ t^z\,\mathrm{e}^{-t} = \Gamma(z+1)$. Zur Kontrolle:

$$\psi_{1/2,1/2,1}(\boldsymbol{r}) = (2a)^{3/2}\sqrt{\frac{1+s_0}{8\pi\,\Gamma(2s_0+1)}}\,(2ar)^{s_0-1}\,\mathrm{e}^{-ar}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathrm{i}\,\frac{1-s_0}{Z\alpha}\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\end{pmatrix}\end{pmatrix} .$$

c) Wie lauten die beiden Wellenfunktionen im Limes $c \to \infty$? Vergleichen Sie mit dem nichtrelativistischen Wasserstoffatom.

(30) Freie Neutrinos **4 P.**

Betrachten Sie masselose Spin 1/2-Teilchen (wie, zumindest in guter Näherung, Neutrinos) in Abwesenheit von Potentialen. In der chiralen Darstellung entkoppeln dann die 2-Spinoren

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

in der Dirac-Gleichung, was auf die sogenannten Weyl-Gleichungen führt. Diese sollen analog zum relativistischen Wasserstoffatom durch Separation von Radial- und Winkelvariablen gelöst werden.

Transformieren Sie dazu den Spinor $(*)$ aus Aufgabe (29) von der Dirac-Darstellung in die chirale (siehe Aufgabe (22)), geben Sie die Weyl-Gleichung für einen stationären rechtshändigen 2-Spinor $\phi(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\phi(\boldsymbol{r})$ an, und zeigen Sie, daß die am Ursprung reguläre Lösung durch

$$\phi_{jm_jk}(\boldsymbol{r}) = \mathcal{N}\big[j_\ell(\varrho)\,\xi^{\pm}_{jm_j} \pm \mathrm{i}\,j_{\ell\pm1}(\varrho)\,\xi^{\mp}_{jm_j}\big] \quad \text{für} \quad k = \pm(j+\tfrac{1}{2})$$

mit $\varrho = Er/\hbar c$ gegeben ist. Hinweis: $j'_\ell(\varrho) = \dfrac{\ell}{\varrho}\,j_\ell(\varrho) - j_{\ell+1}(\varrho) = j_{\ell-1}(\varrho) - \dfrac{\ell+1}{\varrho}\,j_\ell(\varrho)$.