Übungen zur Quantenmechanik II – WS 2008/09 $\boxed{\text{H 12}}$

Abgabetermin: Donnerstag, 05.02.09

(27) Foldy–Wouthuysen-Transformation im feldfreien Fall **5 P.**

Im feldfreien Fall, $A_\mu = 0$, kann die Transformation $\psi' = \mathrm{e}^S\psi$, welche den Hamilton-Operator $H = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2$ auf blockdiagonale Form bringt, exakt angegeben werden:

$$S = \beta\,\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{2p}\,\arctan\left(\frac{p}{mc}\right)$$

(wobei wir nur Impulseigenzustände mit Eigenwert $\boldsymbol{p}$ betrachten). Bestimmen Sie $H' = \mathrm{e}^S H \mathrm{e}^{-S}$. Zeigen Sie dazu, daß $[S\,,H] = 2SH$ sowie $\mathrm{e}^{2S} = E_p^{-1}\beta H$.

Hinweis: $\arctan x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(28) CP-Verletzung im Standardmodell **6 P.**

Im Standardmodell der Teilchenphysik koppeln die Quarks an die geladenen $W_\mu^\pm$-Vektorbosonen durch den Strom

$$J^\mu(x) = \frac{1}{2}\,\overline{\psi}^i(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\chi^j(x)V_{ij}\ ,$$

wobei die Spinoren ψ^i und χ^i mit $i,j = 1,2,3$ die drei up- bzw. down-artigen Quarks beschreiben und V_{ij} die sogenannte Cabibbo–Kobayashi–Maskawa-Matrix ist:

$$\mathcal{L}_{\text{cc}} = \frac{g}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^+ J^\mu + W_\mu^- J^{\mu\dagger}\right)\ .$$

Diese Kopplung ist für die phänomenologisch wichtige CP-Verletzung im Standardmodell verantwortlich:
Eine kombinierte Ladungskonjugation und Paritätstransformation wirkt auf einen Spinor durch

$$CP:\ \psi(x) \xrightarrow{P} \gamma^0\psi(\bar{x}) \xrightarrow{C} \gamma^0 C\,\overline{\psi}^t(\bar{x})$$

mit $\bar{x}^\mu = P^\mu{}_\nu x^\nu$ und $(P^\mu{}_\nu) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. C ist die Ladungskonjugationsmatrix mit den Eigenschaften $C^\dagger = C^{-1}$, $C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^t$ und $C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5^t$. Beachten Sie auch, daß gilt $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = P^\mu{}_\nu\gamma^\nu$.

a) Zeigen Sie für den Dirac-konjugierten Spinor, daß $CP:\ \overline{\psi}(x) \to -\psi^t(\bar{x})C^{-1}\gamma^0$.

b) Zeigen Sie, daß obiger Strom unter CP übergeht in

$$J^\mu(x) \to P^\mu{}_\nu\,\frac{1}{2}\,\overline{\chi}^j(\bar{x})\gamma^\nu(1-\gamma_5)\psi^i(\bar{x})V_{ij}\ .$$

c) Bestimmen Sie $J^{\mu\dagger}(x)$.

d) Zeigen Sie, daß mit der Transformation $W_\mu^\pm(x) \to W_\nu^\mp(\bar{x})P^\nu{}_\mu$ CP-Invarianz von $\int d^4x\,\mathcal{L}_{\text{cc}}$ erreicht werden kann, falls

$$J^\mu(x) \to P^\mu{}_\nu J^{\nu\dagger}(\bar{x})\ .$$

Welche Eigenschaft muss die CKM-Matrix V_{ij} haben, damit dies gilt?
(Für weniger als drei Teilchenfamilien kann diese Eigenschaft stets durch einen unitären Basiswechsel hergestellt werden, sodaß CP-Verletzung durch $\mathcal{L}_{\text{cc}}$ im Standardmodell mindestens drei Teilchenfamilien erfordert. Für diese Erkenntnis wurde Kobayashi und Maskawa 2008 der *Nobelpreis für Physik* verliehen.)