

Abgabetermin: Donnerstag, 29.01.09

(24) Ausblick auf die Quantenelektrodynamik

4 P.

Die Wirkung der Quantenelektrodynamik lautet

$$S[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = \int d^4x \left[\bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]$$

mit kovarianter Ableitung $D_\mu \psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi$ und Feldstärke $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

- a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen von ψ , $\bar{\psi}$ und A_μ durch Variation der Wirkung.
- b) Zeigen Sie, daß der Strom $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ erhalten ist für Felder, die ihre Bewegungsgleichungen erfüllen.
- c) Zeigen Sie, daß die Erhaltung von j^μ auch aus der Bewegungsgleichung für A_μ folgt.

(25) Chirale Symmetrie

2 P.

Betrachten Sie die Transformation

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(i\alpha\gamma_5)\psi$$

mit konstantem reellen Parameter α und der mit allen γ^μ antivertauschenden hermiteschen Matrix γ_5 . Bestimmen Sie die Transformation des Dirac-konjugierten Spinors $\bar{\psi}$. Unter welchen Umständen ist die Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ invariant unter obiger Transformation?

(26) Spin und Helizität

5 P.

In der Dirac-Basis lautet die in dem Hamilton-Operator $H_D = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2$ auftretenden Matrizen

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Der Spin-Operator ist durch $\mathbf{S} = (\hbar/2)\boldsymbol{\Sigma}$ mit $\Sigma_i = \mathbb{1} \otimes \sigma_i$ gegeben.

- a) Berechnen Sie den Kommutator von H_D mit \mathbf{S} .
- b) Was folgt daraus für den Kommutator von H_D mit dem Helizitätsoperator $\Lambda(\mathbf{p}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}/p$?
- c) Bestimmen Sie η so, daß $\Psi_+^t = (1 + \eta^2)^{-1/2}(1, 0, \eta, 0)^t$ ein Eigenspinor von H_D zu $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$ mit Eigenwert E_p ist und geben Sie eine zweite dazu orthogonale Lösung Ψ_- an.
- d) Welche Wirkung hat $\Lambda(p\mathbf{e}_z)$ auf diese beiden Spinoren?