Übungen zur Quantenmechanik II – WS 2008/09 $\boxed{\text{H 10}}$

Abgabetermin: Donnerstag, 22.01.09

(21) Geladenes Klein–Gordon-Feld **4 P.**

Die Bewegungsgleichungen einer Feldtheorie folgen aus dem Variationsprinzip, wonach das Wirkungsfunktional

$$S[\varphi] = \int_V d^4x \; \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

stationär unter *beliebigen* Variationen der Felder $\varphi^i(x) \to \varphi^i(x) + \delta\varphi^i(x)$ ist, die auf dem Rand verschwinden, $\delta\varphi^i(x) = 0$ für $x \in \partial V$. Mit der durch die Entwicklung

$$S[\varphi + \delta\varphi] = S[\varphi] + \int_V d^4x \sum_i \delta\varphi^i(x) \, \frac{\delta S}{\delta \varphi^i(x)} + O(\delta\varphi^2)$$

definierten Variationsableitung $\delta S/\delta\varphi^i(x)$ der Wirkung nach den Feldern lauten die Bewegungsgleichungen dann

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi^i(x)} = 0 \; .$$

a) Bestimmen Sie damit die Bewegungsgleichungen des komplexen geladenen Klein–Gordon-Felds $\phi(x)$ mit Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \; ,$$

wobei $D_\mu \phi = (\partial_\mu + \mathrm{i} e A_\mu)\phi$ die kovariante Ableitung bezeichnet und wir $\hbar = c = 1$ gesetzt haben. Hier können Sie ϕ und $\phi^\dagger$ als unabhängige Variablen φ^1 und φ^2 verwenden.

b) Die Wirkung ist invariant unter globalen Phasentransformationen $\phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi(x)$ mit konstantem $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß

$$j^\mu = -\sum_i \delta\varphi^i(x) \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \, \partial_\mu \varphi^i(x)} \quad \text{mit} \quad \delta\varphi^i(x) = \frac{\partial \varphi^{i\prime}(x)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

(bis auf einen Faktor $1/2m$) der zugehörige aus der Vorlesung bekannte Noether-Strom ist.

(22) Darstellungen der Clifford-Algebra **4 P.**

Drei häufig verwendete irreduzible Darstellungen der Clifford-Algebra $\{\gamma^\mu\,,\gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ sind die chirale oder Weyl-Darstellung,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

die Dirac-Darstellung,

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_D^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

und die Majorana-Darstellung,

$$\gamma_M^0 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma_3 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma_1 \\ \mathrm{i}\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma_1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß diese Darstellungen unitär äquivalent sind, d.h., daß $\gamma_D^\mu = U_D \gamma^\mu U_D^{-1}$ sowie $\gamma_M^\mu = U_M \gamma^\mu U_M^{-1}$ gilt mit Matrizen

$$U_D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad U_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sigma_3 & \mathrm{i}\sigma_1 \\ \sigma_2 & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Spinoren ψ und ψ_D bzw. ψ_M, die die Dirac-Gleichung in der jeweiligen Darstellung erfüllen?

(23) Identitäten für Gamma-Matrizen **3 P.**

Zeigen Sie nur unter Benutzung der Clifford-Algebra, ohne auf eine konkrete Darstellung zurückzugreifen, die folgenden Identitäten ($\not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu$):

a) $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{1}$,

b) $\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = -2\not{p}$,

c) $\gamma^\mu \not{p} \not{q} \gamma_\mu = 4p \cdot q\mathbb{1}$.