Übungen zur Quantenmechanik II – WS 2008/09 $\boxed{\text{H 9}}$

Abgabetermin: Donnerstag, 15.01.09

(18) Reine Eichung **2 P.**

Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung von $\psi(0,\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ durch den Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2m}\big(\boldsymbol{p} + \hbar\vec{a}t\big)^2 + \hbar\,\vec{a}\cdot\boldsymbol{r} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \text{const.},$$

indem Sie diesen durch eine Eichtransformation vereinfachen.

(19) Erhaltung der elektrischen Ladung **2 P.**

Zeigen Sie, daß für Felder $\phi(x)$, welche die eichinvariante Klein–Gordon-Gleichung $\big(D_\mu D^\mu + \mu^2\big)\phi(x) = 0$ erfüllen, der Viererstrom

$$j^\mu = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\big(\phi^\dagger D^\mu\phi - (D^\mu\phi)^\dagger\phi\big)$$

erhalten ist.

(20) Schrödinger-Gleichung für Klein–Gordon-Feld **7 P.**

Das freie Klein–Gordon-Feld $\phi(x)$ erfüllt eine Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\phi = \sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4}\,\phi$$

mit nichtlokalem Hamilton-Operator. Dieses Problem läßt sich mit folgendem Trick umgehen: Der zweikomponentige „Spinor“ $\Psi = (\chi_+, \chi_-)^t$ möge die Schrödinger-Gleichung $\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi = H\Psi$ mit Hamilton-Operator

$$H = (\sigma_3 + \mathrm{i}\sigma_2)\,\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \sigma_3 mc^2$$

erfüllen. Zeigen Sie, daß

a) χ_+ und χ_- dann auch der freien Klein–Gordon-Gleichung genügen. Hinweis: Betrachten Sie $(H + \mathrm{i}\hbar\partial_t)(H - \mathrm{i}\hbar\partial_t)$.

b) Ψ mit Komponenten $\chi_\pm = \dfrac{1}{2mc}\big(mc\phi \pm \mathrm{i}\hbar\partial_{ct}\phi\big)$ obige Schrödinger-Gleichung löst.

c) H hermitesch ist bezüglich des indefiniten Skalarprodukts $\langle\Psi|\Phi\rangle \equiv \int d^3r\,\Psi^\dagger\sigma_3\Phi$.

d) die elektrische Ladung durch $Q = e\langle\Psi|\Psi\rangle$ mit $\chi_\pm$ wie in (b) gegeben ist.

e) die Abbildung $\Psi \mapsto \Psi_c = \sigma_1\Psi^*$ eine Involution ist, welche Ladungskonjugation beschreibt: $Q(\Psi_c) = -Q(\Psi)$.