Übungen zur Quantenmechanik II – WS 2008/09 $\boxed{\text{H 8}}$

Abgabetermin: Donnerstag, 08.01.09

(15) Bornsche Näherung für Streuphasen 5 P.

Betrachten Sie Streuung an einem kugelsymmetrischen Potential $V(r)$.

a) Welche Differentialgleichung erfüllen die Funktionen $g_\ell(r)$ in der Entwicklung der Wellenfunktion

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell \geq 0} \mathrm{i}^\ell \,(2\ell+1)\, P_\ell(\cos\vartheta)\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_\ell}}{kr}\, g_\ell(r) \ ,$$

und welches asymptotische Verhalten haben sie für große Abstände? (1)

b) Betrachten Sie nun zwei Potentiale $V_i(r)$ mit $i = 1, 2$, zu denen Entwicklungsfunktionen $g_\ell^{(i)}(r)$ und Streuphasen $\delta_\ell^{(i)}$ gehören. Leiten Sie die Beziehung

$$\sin\big(\delta_\ell^{(2)} - \delta_\ell^{(1)}\big) = -\frac{2m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty dr\ g_\ell^{(1)}(r)\, g_\ell^{(2)}(r)\,\big[V_2(r) - V_1(r)\big]$$

her, indem Sie die Ableitung der Wronski-Determinante $W\big\{g_\ell^{(1)}, g_\ell^{(2)}\big\}$ integrieren. Für $V_1(r) \equiv 0$ erhalten Sie dann eine Formel zur Bestimmung der Streuphasen (mod π) aus den Entwicklungsfunktionen $g_\ell(r)$. (3)

c) Ist das Potential hinreichend schwach, so kann man für $g_\ell(r)$ die freie Propagation ansetzen und erhält die Bornsche Näherung für die Streuphasen. Bestimmen Sie letztere für $\ell > 0$ zu dem Potential $V(r) = \alpha\, r^{-3}$ für niederenergetische Teilchen mit $m\alpha k/\hbar^2 \ll 1$. (1)
Hinweis: $\int_0^\infty dx\, x^{-1} j_\ell^2(x) = 1/2\ell(\ell+1)$ für $\ell > 0$.

(16) Streuung an harter Kugel 3 P.

Betrachten Sie Streuung von Teilchen der Masse m und Energie E an einer undurchdringlichen Kugel, d.h., an dem Potential

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 \leq r \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie, daß die Radialfunktionen in der obigen Entwicklung für $r > R$ durch

$$g_\ell(r) = C_\ell\, kr\,\big[n_\ell(kR)\, j_\ell(kr) - j_\ell(kR)\, n_\ell(kr)\big]$$

gegeben sind, wobei $j_\ell(x)$ und $n_\ell(x)$ die sphärischen Bessel- und Neumann-Funktionen bezeichnen. Bestimmen Sie die Streuphasen δ_ℓ aus dem asymptotischen Verhalten für $r \to \infty$. Wie lautet damit der totale Wirkungsquerschnitt allgemein und im Grenzfall kleiner Energie $kR \ll 1$?

(17) Lie-Algebra der speziellen unitären Gruppe 3 P.

Welche Eigenschaften haben die Erzeugenden der Gruppe $\mathrm{SU}(n)$ der unitären $(n \times n)$-Matrizen U mit $\det U = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} U^{i_1}{}_1 \dots U^{i_n}{}_n = 1$? Wie lautet die Dimension der zugehörigen Lie-Algebra $\mathrm{su}(n)$ (und damit der Gruppe selbst)? Geben Sie eine Basis für $\mathrm{su}(2)$ an.