Übungen zur Quantenmechanik II – WS 2008/09

H 7

Abgabetermin: Donnerstag, 11.12.08

(13) Bornsche Näherung für Gauss-förmiges Potential **3 P.**

Berechnen Sie in Bornscher Näherung den differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitt für das Potential $V(r) = V_0\, \mathrm{e}^{-\alpha r^2}$ mit $\alpha > 0$.

(14) Streuamplitude für ein separables nichtlokales Potential **8 P.**

Die Wellenfunktion von Teilchen, die an einem Potential $U = 2mV/\hbar^2$ streuen, erfüllt die Lippmann–Schwinger-Gleichung

$$|\psi_{\boldsymbol{k}}\rangle = |\boldsymbol{k}\rangle + G_0 U |\psi_{\boldsymbol{k}}\rangle$$

mit Impulseigenzuständen $\langle \boldsymbol{r}|\boldsymbol{k}\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ und dem inversen Helmholtz-Operator

$$G_0 = \frac{1}{k^2 - \boldsymbol{p}^2/\hbar^2 + \mathrm{i}0}\ , \quad \langle \boldsymbol{r}|G_0|\boldsymbol{r}'\rangle = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

(die infinitesimale Dämpfung $\mathrm{i}0 \equiv \lim_{\varepsilon\to+0} \mathrm{i}\varepsilon$ sorgt für Konvergenz und implementiert die korrekte Randbedingung). In der Vorlesung wurden nur lokale Potentiale $\langle \boldsymbol{r}|U|\boldsymbol{r}'\rangle \equiv U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = U(\boldsymbol{r})\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ behandelt. Insbesondere in der Kernphysik interessiert man sich aber auch für nichtlokale Potentiale.

a) Geben Sie die Lippmann–Schwinger-Gleichung für ein nichtlokales Potential $U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ im Ortsraum an. (1)

b) Im Spezialfall eines *separablen* nichtlokalen Potentials $U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \lambda\, g(\boldsymbol{r})\, g^*(\boldsymbol{r}')$ kann die Lippmann–Schwinger-Gleichung nach der Größe $\langle g|\psi_{\boldsymbol{k}}\rangle$ mit $|g\rangle \equiv \int d^3r\, g(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{r}\rangle$ aufgelöst werden. Drücken Sie das Ergebnis durch $\langle g|\boldsymbol{k}\rangle$ und $\langle g|G_0|g\rangle$ aus. (2)

c) Zeigen Sie damit, daß die Streuamplitude $f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}) = -(4\pi)^{-1}\langle \boldsymbol{k}'|U|\psi_{\boldsymbol{k}}\rangle$ mit $k' = k$ und ihre Bornsche Näherung $f_B(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}) = -(4\pi)^{-1}\langle \boldsymbol{k}'|U|\boldsymbol{k}\rangle$ über

$$f = \frac{f_B}{1 - \lambda\langle g|G_0|g\rangle}$$

zusammenhängen. (1,5)

d) Berechnen Sie für das Yamaguchi-Potential mit $g(\boldsymbol{r}) = \sqrt{m/\pi\hbar^2}\; r^{-1}\mathrm{e}^{-\beta r}$ die Streuamplitude in Bornscher Näherung explizit und zeigen Sie, daß die Streuung isotrop ist. (2)

e) Bestimmen Sie die exakte Streuamplitude für das Yamaguchi-Potential. (1,5)
Hinweis: Rechnen Sie im Impulsraum. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk'\, \frac{k'^2}{(k^2 - k'^2 + \mathrm{i}0)(k'^2 + \beta^2)^2} = -\frac{\pi}{2\beta\,(\beta - \mathrm{i}k)^2}\ .$$