Übungen zur Quantenmechanik II – WS 2008/09 $\boxed{\text{H 6}}$

Abgabetermin: Donnerstag, 4.12.08

(11) Wasserstoffatom im Plattenkondensator **4 P.**

Ein Wasserstoffatom im Grundzustand befinde sich innerhalb eines Plattenkondensators. An diesen wird ein Spannungsimpuls angelegt, der ein homogenes elektrisches Feld

$$\vec{E}(t) = E_0\,\theta(t)\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,\vec{e}_z\ , \quad \beta \geq 0$$

erzeugt. Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Wahrscheinlichkeiten, das Wasserstoffatom für $t > 0$ im $2s$-Zustand bzw. in einem der $2p$-Zustände anzutreffen. Wie lautet das Ergebnis im Limes $\beta \to 0$?
Hinweis: Die Radialanteile der niedrigsten Eigenfunktionen $\langle \vec{r}\,|n\ell m\rangle = R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\Omega)$ des Wasserstoffatoms lauten

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-r/a}\ , \quad R_{20}(r) = \frac{2}{(2a)^{3/2}}\,(1-r/2a)\,\mathrm{e}^{-r/2a}\ , \quad R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}\,(2a)^{3/2}}\,\frac{r}{a}\,\mathrm{e}^{-r/2a}\ .$$

(12) Zweizustandssystem mit periodischer Störung **7 P.**

Ein quantenmechanisches System mit diskretem Spektrum, $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$, unterliege einer zeitabhängigen Störung $V(t)$.

a) Leiten Sie aus der Schrödinger-Gleichung mit Hamilton-Operator $H(t) = H_0 + V(t)$ ein Differentialgleichungssystem für die Entwicklungskoeffizienten $c_n(t)$ in

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t/\hbar}|n\rangle$$

her und zeigen Sie, daß es in erster Ordnung Störungstheorie durch

$$c_n(t) \simeq c_n(0) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t dt' \sum_m \langle n|V_W(t')|m\rangle\, c_m(0)$$

gelöst wird. (2)

b) Das ungestörte System bestehe nun aus zwei Zuständen $|1\rangle$, $|2\rangle$ mit Energiedifferenz $\hbar\omega_{21}$. In dieser Basis seien die Matrixelemente des Störoperators durch

$$\big(V_{nm}(t)\big) = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ \hbar\omega_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|1\rangle$. Die Zeitentwicklung kann exakt bestimmt werden:
Gewinnen Sie aus dem gekoppelten Dgl-System für die Koeffizienten $c_n(t)$ die Gleichung

$$\ddot{c}_2(t) - 2\mathrm{i}\Omega_1\,\dot{c}_2(t) + \omega_0^2\,c_2(t) = 0$$

mit $\Omega_1 = (\omega_{21} - \omega)/2$ und lösen Sie sie mit den entsprechenden Anfangsbedingungen. Diskutieren Sie die Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands $|2\rangle$ als Funktion von ω. (3,5)

c) Berechnen Sie diese Besetzungswahrscheinlichkeit in erster Ordnung Störungstheorie und diskutieren Sie durch Vergleich mit dem exakten Ergebnis deren Gültigkeitsbereich. (1,5)