

(9) Zum Wigner–Eckart-Projektionstheorem

5 P.

a) Gewinnen Sie aus der (nicht zu beweisenden) Identität

$$[\vec{J}^2, [\vec{J}^2, \vec{A}]] = 2\hbar^2 (\vec{J}^2 \vec{A} + \vec{A} \vec{J}^2) - 4\hbar^2 (\vec{A} \cdot \vec{J}) \vec{J}$$

für Drehimpulse \vec{J} und Vektoroperatoren \vec{A} sowie den Eigenschaften von Drehimpulsmatrixelementen skalarer Operatoren das Projektionstheorem (2,5)

$$\langle jm | \vec{A} | jm' \rangle = \frac{\langle j || \vec{A} \cdot \vec{J} || j \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle jm | \vec{J} | jm' \rangle .$$

b) \vec{J}_1 und \vec{J}_2 seien zwei Drehimpulsoperatoren. Berechnen Sie den Mittelwert des Operators

$$\vec{\mu} = g_1 \vec{J}_1 + g_2 \vec{J}_2$$

mit Konstanten g_i in den Eigenzuständen $|jm\rangle$ des Gesamtdrehimpulses $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. (2,5)

(10) Wasserstoffatom im Magnetfeld

6 P.

Das Wasserstoffatom hat einen Gesamtdrehimpuls $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$, wobei $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ der Drehimpuls des Elektrons und \vec{I} der Spin des Protons ist. $|FM_F\rangle \equiv |n; LSJM_F\rangle$ seien die durch die Quantenzahlen des vollständigen Satzes von verträglichen Observablen $H_0, \vec{L}^2, \vec{S}^2, \vec{J}^2, \vec{I}^2, \vec{F}^2$ und F_z charakterisierten Eigenzustände des Hamilton-Operators H_0 .

Der Operator des magnetischen Moments des Elektrons lautet $\vec{M} = \mu_B(\vec{L} + 2\vec{S})/\hbar$. In jedem durch feste Werte von n, L, J und F bestimmten $(2F+1)$ -dimensionalen Unterraum läßt sich auch schreiben

$$\vec{L} + 2\vec{S} = g_{JF} \vec{F} .$$

a) Zeigen Sie, daß der Proportionalitätsfaktor

$$g_{JF} = g_J \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)}$$

lautet, wobei g_J der bekannte Landé-Faktor für $I=0$ ist. Verifizieren Sie dafür zunächst, daß

$$\langle FM_F | \vec{L} | FM'_F \rangle = \frac{\langle J || \vec{L} \cdot \vec{J} || J \rangle}{\hbar^2 J(J+1)} \langle FM_F | \vec{J} | FM'_F \rangle$$

und analog für \vec{S} , wobei $\langle J || \cdot || J \rangle$ die reduzierten Matrixelemente in den Zuständen $|n; LSJM_J\rangle$ bezeichnen. Eine weitere Anwendung des Projektionstheorems in Aufgabe 9 führt dann zur Behauptung. (4)

b) Bestimmen Sie für das 3d-Niveau des Wasserstoffatoms alle möglichen Werte von g_{JF} . (2)