Übungen zur Quantenmechanik II – WS 2008/09 — H 4

Abgabetermin: Donnerstag, 20.11.08

(7) Kopplung von drei Drehimpulsen — 3 P.

Betrachten Sie die Kopplung dreier Drehimpulse zu einem Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3$. Welche und wieviele Multipletts (Singlett **1**, Dublett **2**, Triplett **3**, etc.) enthält das Gesamtsystem, wenn alle drei J_i

a) den Wert 1/2 bzw.

b) den Wert 1 haben?

Geben Sie auch die Entartungsgrade jedes auftretenden Gesamtdrehimpulses J an.
Hinweis: Addieren Sie zunächst zwei Drehimpulse und bilden dann die Summe mit dem dritten, $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{k} = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \otimes \mathbf{k}$.

(8) Tensorprodukt — 8 P.

Ein irreduzibler Tensoroperator T^j transformiert unter Drehungen gemäß

$$\Gamma(U)\, T^j_m\, \Gamma^{-1}(U) = \sum_{m'} D^j_{m'm}(U)\, T^j_{m'} \ .$$

Das Produkt zweier irreduzibler Tensoroperatoren A^{j_1} und B^{j_2} ist zwar wieder ein Tensor, aber im allgemeinen nicht irreduzibel.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der zu beweisenden Identität für Drehmatrizen

$$D^{j_1}_{m_1' m_1}(U)\, D^{j_2}_{m_2' m_2}(U) = \sum_{j,m,m'} \langle j_1 m_1', j_2 m_2' | j m' \rangle\, D^j_{m'm}(U)\, \langle jm | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle \ ,$$

daß die Operatoren T^J mit Komponenten

$$T^J_M = \sum_{m_1} \langle j_1 m_1, j_2, M - m_1 | JM \rangle\, A^{j_1}_{m_1}\, B^{j_2}_{M-m_1}$$

irreduzibel sind. (3)
Hinweis: Um die erste Identität zu zeigen, betrachten Sie $\Gamma(U)|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$.

b) Bestimmen Sie explizit die Komponenten T^J_M des Produkts zweier Vektoroperatoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$. Drücken Sie die Operatoren T^0 und T^1 durch die kartesischen Komponenten von $\vec{A}$ und $\vec{B}$ aus. (5)
Hinweis: Die Clebsch–Gordan-Koeffizienten $\langle 1m_1, 1m_2 | jm \rangle$ mit $m = m_1 + m_2$ lauten

$j \setminus m_2$	1	0	-1
2	$\sqrt{\frac{(1+m)(2+m)}{12}}$	$\sqrt{\frac{(2-m)(2+m)}{6}}$	$\sqrt{\frac{(1-m)(2-m)}{12}}$
1	$-\sqrt{\frac{(1+m)(2-m)}{4}}$	$\frac{m}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{(1-m)(2+m)}{4}}$
0	$\sqrt{\frac{(1-m)(2-m)}{6}}$	$-\sqrt{\frac{(1-m)(1+m)}{3}}$	$\sqrt{\frac{(1+m)(2+m)}{6}}$