Übungen zur Quantenmechanik II – WS 2008/09

H 1

Abgabetermin: Donnerstag, 30.10.08

(1) Fermionen auf Kugeloberfläche **2 P.**

Mehrere identische nicht wechselwirkende Spin 1/2-Teilchen der Masse m sind an die Oberfläche einer Kugel mit Radius R gebunden. Wieviele Teilchen enthält das System im Grundzustand mit Energie $E = 42\,\hbar^2/2mR^2$?

(2) Fermionen im Kastenpotential **3 + 3 P.**

In dem eindimensionalen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

mögen sich N identische nicht wechselwirkende Spin 1/2-Teilchen befinden.

a) Bis zu welchem Energiewert sind die Eigenzustände im Grundzustand des Systems besetzt, und wie groß ist die zugehörige Grundzustandsenergie E_0? Wie verhält sich E_0 für $N \gg 1$? Wie groß wäre die Grundzustandsenergie eines Systems von N nicht wechselwirkenden Bosonen in diesem Potential?

b) Geben Sie für $N = 2$ die zwei niedrigsten Energien des Systems sowie ihre Entartungsgrade an, und bestimmen Sie die normierten Wellenfunktionen aller zugehörigen Zustände. Wählen Sie eine Basis, in der die Wellenfunktionen in Orts- und Spin-Anteile mit definierter Symmetrie separieren.

(3) Permutationsoperator für zwei Spin 1/2-Teilchen **3 P.**

Zeigen Sie, daß der Operator

$$P_{12} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma}\right)$$

die Spinvariablen vertauscht (d.h. $P_{12}\,\psi(m_{s_1}, m_{s_2}) = \psi(m_{s_2}, m_{s_1})$), indem Sie ihn auf alle Basiszustände

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

anwenden. (Hinweis: Verwenden Sie Leiteroperatoren $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm \mathrm{i}\sigma_y)/2$.)