# 12. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 14. Semesterwoche (13./16.07.2009)

**Aufgabe 25:** (3 Punkte)

(a) Verwenden Sie die fundamentale Eigenschaft der Dirac-Algebra,

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu},$$

um darstellungsunabhängig zu zeigen, dass $\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ mit allen $\gamma^\mu$ antivertauscht, d.h. $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$.

(b) Zeigen Sie auf diese Weise ebenso darstellungsunabhängig, dass $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$.

(c) Verifizieren Sie damit, dass die rechts- und linkshändigen Projektoren

$$P_{\mathrm{R}} := \frac{1}{2}(1+\gamma_5), \quad P_{\mathrm{L}} := \frac{1}{2}(1-\gamma_5),$$

die Projektor-Algebra

$$P_{\mathrm{R,L}}^2 = P_{\mathrm{R,L}}, \quad P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}} = 0, \quad P_{\mathrm{R}} + P_{\mathrm{L}} = 1$$

erfüllen.

(d) Zeigen Sie damit, dass der kinetische Term der Dirac-Theorie in separate kinetische Terme für $\psi_{\mathrm{L}}$ und $\psi_{\mathrm{R}}$ zerlegt werden kann, wobei $\psi_{\mathrm{R,L}} = P_{\mathrm{R,L}}\psi$. Zeigen Sie außerdem, dass dies für den Massenterm nicht gilt.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\bar{\psi}_{\mathrm{L,R}} = \bar{\psi}P_{\mathrm{R,L}}$ (warum?).

**Aufgabe 26:** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Theorie mit Wirkung

$$S = \int d^4x \left(\bar{\psi}i\partial_\mu\gamma^\mu\psi - \frac{\lambda}{2}\left[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2\right]\right)$$

invariant ist sowohl unter Vektortransformationen $\mathrm{U}(1)_\mathrm{V}$ als auch unter axialen Transformationen $\mathrm{U}(1)_\mathrm{A}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(1)_\mathrm{V}: &\quad \psi \to e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \to e^{-i\alpha}\bar{\psi}, \\ \mathrm{U}(1)_\mathrm{A}: &\quad \psi \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}\, e^{i\alpha\gamma_5}, \end{aligned}$$

(Hinweis: Es genügt, infinitesimale Transformationen zu betrachten), und berechnen Sie die zugeörigen Noether-Ströme.