Quantenfeldtheorie

FSU Jena - SS 2009

Serie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

22. Juli 2009

Definition: Algebra

Eine *Algebra* $(\mathbb{K}, V, +, \cdot, \wedge)$ über einen Körper $\mathbb{K}$ ist eine $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \cdot)$ mit zusätzlicher Verknüpfung[1]

$$\wedge : V \times V \to V$$

die erfüllt:

- Links & Rechtsdistributivität: $x \wedge (y+z) = x \wedge y + x \wedge z$ und $(y+z) \wedge x = y \wedge x + z \wedge x$ für $x, y, z \in V$
- Verträglichkeit mit Skalarmultiplikation:

$$(\lambda x) \wedge (\mu y) = (\lambda\mu)(x \wedge y) \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ x, y \in V$$

Ist $\wedge$ assoziativ (also $(V, \wedge)$ eine Halbgruppe), so heißt die Algebra *assoziativ.* Besitzt $\wedge$ ein neutrales Element $1 \in V$, so heißt die Algebra *unitär.*[2]

Bemerkungen:

- Das neutrale Element 1 ist eindeutig bestimmt.
- Ist die Algebra unitär, assoziativ, $x, y, z \in V$ mit $x \wedge y = 1 = z \wedge x$, so ist $y = z$. In dem Falle nennt man das eindeutige $y =: x^{-1}$ zu x *invers.*
- Es gilt $(x^{-1})^{-1} = x^{-1}$ und $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.
- Es gilt stets $0 \wedge x = x \wedge 0 = 0$ für $x \in V$ und falls $|V| \geq 2$ auch $1 \neq 0$. Insbesondere kann dann $0 \in V$ kein Inverses besitzen.

Annahme: Im folgenden ist die Algebra assoziativ, unitär mit $|V| \geq 2$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $x \wedge x = 0\ \forall\ x \in V$.

Aufgabe 24

(a) Setzen

$$\vartheta_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vartheta_2 := \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}$$

Dann erfüllen ϑ_1, ϑ_2 tatsächlich die gewünschten Beziehungen.

(b) Wegen

$$(\vartheta_1 \wedge \vartheta_2)^n \overset{n \geq 2}{=} \underbrace{(\vartheta_1 \wedge \vartheta_2) \wedge \cdots \wedge (\vartheta_1 \wedge \vartheta_2)}_{\times n} = \underbrace{\vartheta_1 \wedge \vartheta_1}_{0} \wedge \vartheta_2 \wedge \vartheta_2 \wedge (\vartheta_1 \wedge \vartheta_2) \wedge \cdots \wedge (\vartheta_1 \wedge \vartheta_2) = 0$$

gilt

$$\exp(\vartheta_1 \wedge \vartheta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vartheta_1 \wedge \vartheta_2)^n = 1 + \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$$

---

[1] Obwohl das Symbol $\wedge$ für spezielle Algebren reserviert ist, sei es hier im allgemeineren Sinne verwendet.

[2] Eine assoziative, unitäre Algebra ist also ein Monoid $(V, \wedge)$.

Dabei ist insbesondere

$$\underbrace{\exp(\vartheta_1 \wedge \vartheta_2)}_{1+\vartheta_1\wedge\vartheta_2} \wedge (1 - \vartheta_1 \wedge \vartheta_2) = 1 - \underbrace{(\vartheta_1 \wedge \vartheta_2)^2}_{0} - \cancel{\vartheta_1 \wedge \vartheta_2} + \cancel{\vartheta_2 \wedge \vartheta_1} = 1$$

$$\overset{\text{analog}}{=} (1 - \vartheta_1 \wedge \vartheta_2) \wedge \exp(\vartheta_1 \wedge \vartheta_2)$$

das heißt

$$\exp(\vartheta_1 \wedge \vartheta_2) = 1 + \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 = (1 - \vartheta_1 \wedge \vartheta_2)^{-1}$$

Definitionsgemäß ist dann

$$\ln[1 + \vartheta_1 \wedge \vartheta_2] = \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 = \underbrace{(1 + \vartheta_1 \wedge \vartheta_2)}_{(1-\vartheta_1\wedge\vartheta_2)^{-1}} - 1$$

(c) Annahme: $\mathbb{K}$ hat Charakteristik ≥ 3. Machen den Ansatz

$$x = \lambda \cdot 1 + \lambda_1 \vartheta_1 + \lambda_2 \vartheta_2 + \mu \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 \quad , \quad \lambda, \mu, \lambda_i \in \mathbb{K}$$

das heißt

$$\lambda^2 + 2\lambda\lambda_1\vartheta_1 + 2\lambda\lambda_2\vartheta_2 + \lambda\mu\vartheta_1 \wedge \vartheta_2 \overset{!}{=} 1 + \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 \qquad (\clubsuit)$$

Durch Verkeilung von ($\clubsuit$) mit $\vartheta_1 \wedge \vartheta_2$ erhält man

$$\lambda^2 \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 \overset{!}{=} \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$$

das heißt $\lambda = \sqrt{1}$. Durch Verkeilung von ($\clubsuit$) mit ϑ_1 bzw. ϑ_2 erhält man jeweils $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$, und ferner $\mu = \lambda/2$. Somit

$$x \in \left\{ \lambda \cdot 1 + \frac{\lambda}{2} \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 \ : \ \lambda^2 = 1 \right\}$$

(d) Wegen

$$\vartheta_{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge \vartheta_{i_{\sigma(k)}} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \vartheta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \vartheta_{i_k} \quad , \quad \sigma \in \operatorname{Sym}(k) \ , \ i_1, .., i_k \in \{1, .., n\}$$

können wir uns zur Betrachtung der linearen Unabhängigkeit o.B.d.A. auf Produkte $\vartheta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \vartheta_{i_k}$ mit $i_1 < \cdots < i_k$ beschränken. Insbesondere spannen diese die gesamte Algebra auf. Anderseits ist die Menge aller solcher Produkte linear unabhängig, denn für

$$\sum_{I \subseteq \{1,..,n\}} \lambda_I \cdot \underbrace{\bigwedge_{i \in I} \vartheta_i}_{\substack{\text{o.B.d.A.} \\ \text{in steigender} \\ \text{Reihenfolge} \\ \text{der } i\text{'s}}} = 0$$

liefert die Verkeilung mit irgendeinem $I^c \subset \{1, .., n\}$ dass $\lambda_I = 0$ sein muss. Demnach existieren genau

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

unabhängige Elemente der Algebra.