10. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 12. Semesterwoche (29./02.07.2009)

Aufgabe 21: (3 Punkte)

Die Generatoren $M_{\mu\nu} \equiv -M_{\mu\nu}$ der Lorentz-Gruppe SO(3,1) erfüllen die Lie-Algebra

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Komponenten

$$J_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk}, \quad K_i \equiv M_{i0} = -M_{0i}, \quad (i,j,k = 1,2,3)$$

die algebraischen Beziehungen

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k$$

erfüllen, so dass $\mathbf{J}$ einem Drehimpulsgenerator und $\mathbf{K}$ dem Generator von *Boosts* entspricht.

(b) Wechseln Sie nun noch einmal die Basis durch die Definition von **A**- und **B**-Spingeneratoren

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}),$$

und zeigen Sie, dass diese folgende Lie-Algebren erfüllen

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k, \quad [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k, \quad [A_i, B_j] = 0.$$

Damit haben Sie gezeigt, dass die Algebra der Lorentzgruppe in zwei miteinander kommutierende Drehimpulsalgebren zerfällt.

Aufgabe 22: (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt zwischen zwei SL(2,$\mathbb{C}$)-Spinoren,

$$\xi\zeta \equiv \xi^\alpha\zeta_\alpha := \epsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta\zeta_\alpha, \quad \text{mit } \epsilon^{\alpha\beta} \equiv i(\sigma_2)^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

invariant unter Lorentz-Transformationen $\xi'_\alpha = a_\alpha{}^\beta\xi_\beta$, $\zeta'_\alpha = a_\alpha{}^\beta\zeta_\beta$ ist, wobei a ein Element von SL(2,$\mathbb{C}$), d.h. eine komplexe 2×2 Matrix mit $\det a = 1$ ist.

Hinweis: Beweisen und verwenden Sie die für beliebige 2×2 Matrizen M gültige Formel $\epsilon M^{\mathrm{T}}\epsilon^{\mathrm{T}} = (\det M)M^{-1}$, wobei das Superskript T die Transponierte einer Matrix bezeichnet.

Aufgabe 23: (4 Punkte)

Betrachten Sie den Zusammenhang zwischen 4er-Vektoren und der zugehörigen Spinorbasis. Dieser Zusammenhang wird vermittelt durch

$$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta} = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}), \quad (\bar\sigma_\mu)^{\dot\alpha\beta} = (\mathbb{1}, -\boldsymbol{\sigma}),$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ die Pauli-Spinmatrizen bezeichnet.

(a) Zeigen Sie mit diesen Definition, dass gilt:

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\bar\sigma^\mu\sigma_\nu) = \delta^\mu_\nu \\ &(2) \qquad (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\bar\sigma_\mu)^{\dot\gamma\delta} = 2\delta^\delta_\alpha\delta^{\dot\gamma}_{\dot\beta}. \\ &(3) \qquad \sigma_\mu\bar\sigma_\nu + \sigma_\nu\bar\sigma_\mu = \bar\sigma_\mu\sigma_\nu + \bar\sigma_\nu\sigma_\mu = 2\,g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

(b) Leiten Sie desweiteren mit Hilfe der Darstellung der Lorentz-Transformationsmatrix $\Lambda^\mu{}_\nu$ durch Spin- und Boost-Generatoren $\mathbf{J}$ und $\mathbf{K}$ den Zusammenhang zwischen Λ und den Spinor-Lorentz-Transformationen a her:

$$\sigma_\mu\Lambda^\mu{}_\nu = a\sigma_\nu a^\dagger.$$

(c) Zeigen Sie damit, dass der aus SL(2,$\mathbb{C}$)-Spinoren $\xi^\alpha, \eta^{\dot\beta}$ gebildete 4er-Vektor

$$V_\mu = \xi^\alpha(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\eta^{\dot\beta}$$

die richtigen Transformationseigenschaften unter Lorentz-Transformation hat.

Hinweis: verwenden Sie den Hinweis aus Aufgabe 22.