Quantenfeldtheorie

FSU Jena - SS 2009

Serie 09 - Lösungen

Stilianos Louca

21. Juli 2009

Vorbetrachtung

Fresnel Integrale

Es gilt:[1]

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha t^2+\beta t)} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \beta \in \mathbb{R}} \tag{1}$$

Beweis:

1. Zeigen zunächst:

$$\int_0^{\infty} e^{it^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \tag{2}$$

Die Funktion $f(z) = e^{-z^2}$ ist holomorph, insbesondere verschwindet jedes geschlossene Integral in $\mathbb{C}$. Betrachten den Weg entlang eines *Pizza-Stücks* im 1. Quadranten (vgl. Abbildung 1) bestehend aus den Wegen $\gamma_i(R),\ i = 1, 2, 3$ für irgendein $R > 0$.

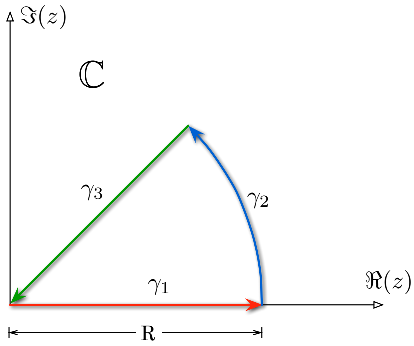

Abbildung 1: Pizza-Integrationsweg für f mit Radius R.

Durch die Parametrisierung $z(t) = te^{i\frac{\pi}{4}}$ auf γ_3 erhält man

$$\int_{\gamma_3(R)} f(z)\ dz = -\int_0^R \exp\left[-\left(te^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2\right] e^{i\frac{\pi}{4}}\ dt = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-it^2}\ dt \xrightarrow{R\to\infty} -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-it^2}$$

[1] Im Falle $\alpha < 0$ ist $\sqrt{\pi/\alpha}$ so zu deuten dass $\Im\left\{\sqrt{\pi/\alpha}\right\} \leq 0$.

Durch die Parametrisierung $z(\vartheta) = Re^{i\vartheta}$ auf γ_2 erhält man

$$\left| \int\limits_{\gamma_2(R)} f(z)\ dz \right| = \left| \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(Re^{i\vartheta})^2} iR\ d\vartheta \right| \leq R \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\left| e^{-R^2 e^{i2\vartheta}} e^{i\vartheta} \right|}_{e^{-R^2 \cos(2\vartheta)}}\ d\vartheta$$

$$\leq Re^{-R^2} \underbrace{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{R^2 \frac{4\vartheta}{\pi}}\ d\vartheta}_{\frac{\pi}{4R^2}\left[e^{R^2}-1\right]} \qquad \Bigg| \qquad \cos(2\vartheta) \geq 1 - \frac{4\vartheta}{\pi}$$

$$\leq \frac{\pi}{4R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dementsprechend

$$-e^{i\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\infty} e^{-it^2}\ dt = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_3(R)} f(z)\ dz = -\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_1(R)} f(z)\ dz - \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_2(R)} f(z)\ dz}_{0} = -\underbrace{\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}\ dt}_{\text{Gauß}} - 0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

das heißt

$$\int\limits_0^{\infty} e^{it^2}\ dt = e^{i\frac{\pi}{4}} \left[e^{i\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\infty} e^{-it^2}\ dt \right]^* = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. Sei nun $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$, dann

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t^2 + i\beta t} dt = e^{-\frac{i\beta^2}{4\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \Bigg(\underbrace{\sqrt{\alpha} t + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}_{=:u} \Bigg)^2 \right] dt = e^{-\frac{i\beta^2}{4\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[iu^2\right]\ \frac{du}{\sqrt{\alpha}} \overset{(2)}{=} e^{i\frac{\pi}{4} - \frac{i\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

3. Für $\alpha < 0$ schreiben

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t^2 + i\beta t} dt = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(-\alpha)t^2 + i(-\beta)t}\ dt \right]^* \overset{(-\alpha)>0}{=} \left[e^{i\frac{\pi}{4} - \frac{i(-\beta)^2}{4(-\alpha)}} \sqrt{\frac{\pi}{2(-\alpha)}} \right]^* = e^{-i\frac{\pi}{4} - \frac{i\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{-\pi}{\alpha}} = e^{i\frac{\pi}{4} - \frac{i\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Vorbemerkung: Variablensubstitution

Betrachtet sei das Integral

$$\int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\infty} ds_1\ ds_2\ f(s_1, s_2)$$

Dann transformiert sich das Integral mit der Variablentransformation

$$s := s_1 + s_2\ ,\ \ v := \frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1} \quad , \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \overset{\Psi}{\mapsto} \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix}$$

gemäß

$$\int\limits_{[0,\infty)^2} d(s_1, s_2)\ f(s_1, s_2) = \int\limits_{\Psi([0,\infty))} \frac{d(s,v)}{\det(\Psi')} \underbrace{f(s_1(s,v), s_2(s,v))}_{f(s,v)} = \int\limits_{[0,\infty)\times[-1,-1]} d(s,v)\ \frac{s}{2} f(s,v) \tag{3}$$

Faltung des Feynman-Propagators

Beginnend mit der Darstellung

$$\Delta_F(x-y) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon}$$

schreiben wir

$$\int d^D q\ \mathcal{F}(\Delta_F)(q)\mathcal{F}(\Delta_F)(p-q) = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int d^D q\ \frac{1}{q^2-m_0^2+i\varepsilon}\cdot\frac{1}{(p-q)^2-m_0^2+i\varepsilon}$$

$$= -\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty d^D q\ ds_1\ ds_2\ \exp\left[i(q^2-m_0^2+i\varepsilon)s_1 + i\left((p-q)^2-m_0^2+i\varepsilon\right)s_2\right]$$

$$= -\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int ds_1\ ds_2\ \exp\left[i(-m_0^2+i\varepsilon)(s_1+s_2)+ip^2s_2\right]\underbrace{\int d^D q\ \exp\left[i(s_1+s_2)\cdot q^2 - i2s_2pq\right]}_{\Omega}$$

wobei

$$\Omega = \int dq^0\ \exp\left[i(s_1+s_2)\cdot(q^0)^2 - i2s_2p^0q^0\right]\int d^d\mathbf{q}\ \exp\left[-i(s_1+s_2)\cdot\mathbf{q}^2 + i2s_2\mathbf{pq}\right]$$

$$\stackrel{(1)}{=} e^{i\frac{\pi}{4}}\exp\left[-i\frac{(2s_2p^0)^2}{4(s_1+s_2)}\right]\sqrt{\frac{\pi}{s_1+s_2}}\cdot\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^d\prod_{k=1}^d\exp\left[i\frac{(2s_2p^k)^2}{4(s_1+s_2)}\right]\sqrt{\frac{\pi}{s_1+s_2}}$$

$$= ie^{-iD\frac{\pi}{4}}\exp\left[-i\frac{s_2^2p^2}{(s_1+s_2)}\right]\cdot\frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(s_1+s_2)^{\frac{D}{2}}}$$

das heißt

$$\int d^D q\ \mathcal{F}(\Delta_F)(q)\mathcal{F}(\Delta_F)(p-q) = -\lim_{\varepsilon\searrow 0} i\pi^{\frac{D}{2}}e^{-iD\frac{\pi}{4}}\int ds_1\ ds_2\ \exp\left[i(-m_0^2+i\varepsilon)(s_1+s_2)+\frac{is_1s_2p^2}{(s_1+s_2)}\right]\cdot\frac{1}{(s_1+s_2)^{\frac{D}{2}}} \tag{4}$$

Gemäß der Transformation (3) schreiben wir Ausdruck (4) weiter

$$\int d^D q\ \mathcal{F}(\Delta_F)(q)\mathcal{F}(\Delta_F)(p-q) = -\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{i}{2}\pi^{\frac{D}{2}}e^{-iD\frac{\pi}{4}}\int\limits_{-1}^{1}dv\int\limits_0^\infty ds\ \underbrace{\exp\left[i(-m_0^2+i\varepsilon)\cdot s + \frac{ip^2}{4}(1-v^2)s\right]\cdot s^{1-\frac{D}{2}}}_{f(s,v)} \tag{5}$$

Die Funktion $f(s,v)$ ist holomorph bzgl. s auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, insbesondere verschwinden jegliche geschlossene Integrale $\oint f$. Betrachten den geschlossenen Weg in Abbildung (2), für irgendwelche Radien $R > r > 0$.

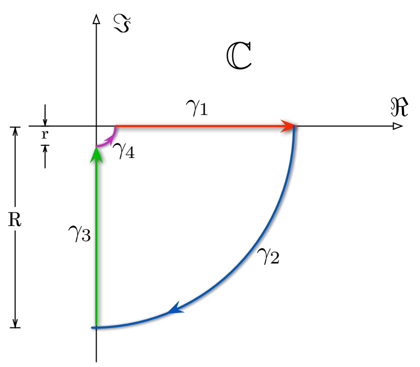

Abbildung 2: Geschlossener Integrationsweg für $f(\cdot,v) : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

Mit der Parametrisierung $z(\vartheta) = Re^{-i\vartheta},\ \vartheta \in [0, \pi/2]$ auf γ_2 können wir abschätzen

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int\limits_{\gamma_2(R)} f(z,v)\ dz\right| \le \lim_{R\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R\underbrace{\left|\exp\left[iRe^{-i\vartheta}\left(-m_0^2+\frac{p^2}{4}(1-v^2)\right)-\varepsilon Re^{-i\vartheta}\right]\right|}_{\exp\left[R\sin(\vartheta)\left(-m_0^2+\frac{p^2}{4}(1-v^2)\right)-\varepsilon R\cos(\vartheta)\right]} R^{1-\frac{D}{2}}\ d\vartheta$$

$$\overset{p^2\le 4m_0^2}{\le} \lim_{R\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{R^{2-\frac{D}{2}}\exp\left[-R\frac{m_0^2v^2}{4}\sin(\vartheta)\right]}_{\le\text{const}} d\vartheta \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\lim_{R\to\infty} R^{2-\frac{D}{2}}\exp\left[-R\frac{m_0^2v^2}{4}\sin(\vartheta)\right]}_{0\text{ fast überall}} d\vartheta = 0$$

Ähnlich schätzen wir ab

$$\lim_{r\searrow 0}\left|\int\limits_{\gamma_4(r)} f(z,v)\ dz\right| \le \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} r^{2-\frac{D}{2}}\exp\left[-r\sin(\vartheta)\frac{m_0^2v^2}{4}\right] d\vartheta \xrightarrow[D<4]{r\searrow 0} 0$$

Somit ist

$$\int\limits_0^\infty f(z,v)\ dz = -\underbrace{\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_2(R)} f(z,v)\ dz}_{0} - \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int\limits_{\gamma_3(R)} f(z,v)\ dz - \underbrace{\lim_{r\to 0}\int\limits_{\gamma_4(r)} f(z,v)\ dz}_{0} \overset{z(t)=-it}{=} -i\int\limits_0^\infty f(-it,v)\ dt$$

und Darstellung (5) geht über in die Form

$$\int d^Dq\ \mathcal{F}(\Delta_F)(q)\mathcal{F}(\Delta_F)(p-q) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} -\frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{2}e^{-iD\frac{\pi}{4}}\int\limits_{-1}^{1} dv\int\limits_0^\infty dt\ \exp\left\{\overbrace{\left[-m_0^2+\frac{p^2}{4}(1-v^2)\right]}^{-\lambda<0} t + i\varepsilon t\right\}\cdot(-it)^{1-\frac{D}{2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\searrow 0} -\pi^{\frac{D}{2}}\underbrace{e^{-iD\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{D}{2}\right)}}_{-i}\int\limits_0^1 dv\int\limits_0^\infty dt\ e^{-\lambda t+i\varepsilon t}u^{1-\frac{D}{2}}$$

$$\overset{u:=\lambda t}{=} \lim_{\varepsilon\searrow 0} i\pi^{\frac{D}{2}}\int\limits_0^1 dv\ \lambda(v)^{\frac{D}{2}-2}\int\limits_0^\infty du\ e^{-u+i\frac{\varepsilon}{\lambda}u}u^{1-\frac{D}{2}} \quad ,\quad D<4$$

Wegen

$$\left|\int\limits_0^\infty e^{-u+i\frac{\varepsilon}{\lambda}u}u^{1-\frac{D}{2}}\ du\right| \le \int\limits_0^\infty \underbrace{\left|e^{-u+i\frac{\varepsilon}{\lambda}u}u^{1-\frac{D}{2}}\right|}_{e^{-u}u^{1-\frac{D}{2}}}\ du = \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)$$

kann nach Lebesgue der Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}$ in das 1. Integral gezogen werden. Ähnlich zeigt man, dass der Grenzwert auch in das 2. Integral gezogen werden kann, so dass man erhält

$$\int d^Dq\ \mathcal{F}(\Delta_F)(q)\mathcal{F}(\Delta_F)(p-q) = i\pi^{\frac{D}{2}}\int\limits_0^1 dv\ \lambda(v)^{\frac{D}{2}-2}\underbrace{\int\limits_0^\infty du\ e^{-u}u^{1-\frac{D}{2}}}_{\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)}$$

$$= i\pi^{\frac{D}{2}}\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\cdot\int\limits_0^1 dv\ \left[m_0^2-\frac{p^2}{4}(1-v^2)\right]^{\frac{D}{2}-2} \tag{6}$$

Aufgabe 20

(a) Mit

$$\mathcal{H}_I(x) = \frac{g}{3!}\Phi^3(x)$$

ergibt sich der 2-Punkt Korrelator in 2. Ordnung (bis auf impulsunabhängige Beiträge (*)) gemäß

$$G^{[2]}(x,y) = \frac{\langle 0|\,\mathcal{T}\left[\Phi_x\Phi_y S^{(2)}\right]|0\rangle}{\langle 0|\,S\,|0\rangle} = \langle 0|\,(\text{Selbstenergie-Diagramme})\,|0\rangle$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2!}\left(\frac{-ig}{3!}\right)^2 \cdot 2\int d^Dx_1\; d^Dx_2\; 3\cdot 2\cdot 3\cdot \Phi_x\Phi_{x_1}\left(\Phi_{x_1}\Phi_{x_2}\right)^2\Phi_{x_2}\Phi_y$$

$$= -18\frac{g^2}{(3!)^2}\int d^Dx_1\; d^Dx_2\;\Delta_F(x-x_1)\Delta_F^2(x_1-x_2)\Delta_F(y-x_2)$$

Im Fourierraum entsprechend

$$\mathcal{F}(G^{[2]})(p,q) = -\frac{18g^2}{(3!)^2}\int d^Dx_1\; d^Dx_2\; d^Dx\; d^Dy\;\Delta_F(x-x_1)\Delta_F^2(x_1-x_2)\Delta_F(y-x_2)e^{ipx}e^{-iqy}$$

$$= -\frac{18g^2}{(3!)^2}\int d^Dx_1\; d^Dx_2\;\Delta_F^2(x_1-x_2)\mathcal{F}(\Delta_F)(p)e^{ipx_1}\underbrace{\mathcal{F}(\Delta_F)(-q)}_{\mathcal{F}(\Delta_F)(q)}e^{-iqx_2}$$

$$= -\frac{18g^2}{(3!)^2}\mathcal{F}(\Delta_F)(p)\mathcal{F}(\Delta_F)(q)\int d^Dx_1\; d^Dx_2\;\Delta_F^2(x_1-x_2)e^{ipx_1-iqx_2}$$

$$\overset{u:=x_1-x_2}{=} -\frac{18g^2}{(3!)^2}\mathcal{F}(\Delta_F)(p)\mathcal{F}(\Delta_F)(q)\underbrace{\int d^Dx_2\; e^{i(p-q)x_2}}_{(2\pi)^D\delta(p-q)}\;\underbrace{\int d^Du\;\Delta_F^2(u)e^{ipu}}_{\substack{\mathcal{F}\{\Delta_F^2\}(p)\\ =\frac{1}{(2\pi)^D}(\mathcal{F}(\Delta_F)*\mathcal{F}(\Delta_F))(p)}}$$

$$= -\delta(p-q)\cdot\frac{18g^2}{(3!)^2}\mathcal{F}(\Delta_F)(p)\mathcal{F}(\Delta_F)(q)\int d^Dq\;\mathcal{F}(\Delta_F)(q)\mathcal{F}(\Delta_F)(p-q)$$

$$\overset{(6)}{=} (2\pi)^D\delta(p-q)\cdot\underbrace{\frac{18g^2}{(3!)^2}\frac{(-i)}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}}\mathcal{F}(\Delta_F)(p)\mathcal{F}(\Delta_F)(q)\cdot\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\cdot\int_0^1 dv\left[m_0^2-\frac{p^2}{4}(1-v^2)\right]^{\frac{D}{2}-2}}_{G^{(2)}(p^2)}$$

Insbesondere

$$\boxed{\Sigma(p^2) = -\frac{18g^2}{(3!)^2}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}}\cdot\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\cdot\int_0^1 dv\left[m_0^2-\frac{p^2}{4}(1-v^2)\right]^{\frac{D}{2}-2}} \tag{7}$$

(b) Für $p^2 > 4m_0^2$ ist die *Wurzel*

$$\Big[\underbrace{m_0^2-\frac{p^2}{4}(1-v^2)}_{\substack{<0\\ \text{für bestimmte } v}}\Big]^{\frac{D}{2}-2}$$

nicht mehr eindeutig definiert. In diesem Sinne wird $\Sigma(p^2)$ *mehrdeutig*.

(c) Zu berechnen ist die (gegebenfalls entsprechend zu interpretierende) Reihe

$$G(p^2) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{p^2-m_0^2}\left[\frac{\left(-i\Sigma(p^2)\right)i}{p^2-m_0^2}\right]^n$$

Fordert man die Stabilität[2] und Linearität[3] der Reihenbildung so ergibt sich bekanntlich der Wert

$$G(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Sigma(p^2)}{p^2 - m_0^2}} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)}$$

(d) Mit

$$p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2) = \underbrace{p^2 - m_0^2 - \Sigma(m^2)}_{p^2 - m^2} - \frac{\partial \Sigma}{\partial p^2}\Big|_{p^2 = m^2} \cdot \left(p^2 - m^2\right) + \mathcal{O}\left((p^2 - m^2)^2\right)$$

$$= \left(p^2 - m^2\right) \cdot \left[1 - \frac{\partial \Sigma}{\partial p^2}\Big|_{p^2 = m^2}\right] + \mathcal{O}\left((p^2 - m^2)^2\right)$$

können wir schreiben

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)} \in \mathcal{O}\left\{\frac{i}{(p^2 - m^2)\left(1 - \frac{\partial \Sigma}{\partial p^2}\Big|_{p^2 = m^2}\right)}\right\} \quad , \quad p^0 \to E_{\mathbf{p}}$$

(e) Speziell für $D = 3$ ist

$$\Sigma(p^2) = -\frac{18 g^2}{(3!)^2} \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{\sqrt{\pi}} \int_0^1 dv \; \left[m_0^2 - \frac{p^2}{4}(1 - v^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\left(\frac{g^2}{m_0^3}\right) \frac{18 m_0^2}{8\pi (3!)^2} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{4 m_0^2}(1 - v^2)}}$$

Dementsprechend lautet die Massengleichung

$$m^2 = m_0^2 + \Sigma(p^2 = m^2) = m_0^2 \left[1 - \frac{g^2}{m_0^3} \frac{18}{8\pi (3!)^2} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{4 m_0^2}(1 - v^2)}}\right]$$

$$= m_0^2 \left[1 - \frac{g^2}{m_0^3} \frac{18}{8\pi (3!)^2} \int_0^1 dv \; \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m_0^2 + \mathcal{O}\left(\frac{g^2}{m_0^3}\right)}{4 m_0^2}(1 - v^2)}}}_{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}(1 - v^2)}} + \mathcal{O}\left(\frac{g^2}{m_0^3}\right)}\right]$$

$$= m_0^2 \left[1 - \left(\frac{g^2}{m_0^3}\right) \frac{18 \ln 3}{8\pi (3!)^2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{g^2}{m_0^3}\right)^2\right)\right]$$

(f) Formal ergibt sich für $D = 4 - \varepsilon$:

$$\Sigma(p^2) = -\frac{18 g^2}{(3!)^2} \underbrace{\frac{1}{(4\pi)^{2 - \frac{\varepsilon}{2}}}}_{\frac{1}{(4\pi)^2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)} \underbrace{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon)} \int_0^1 dv \; \underbrace{(m_0^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}}}_{1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln m_0^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} \underbrace{\left[1 - \frac{p^2}{4 m_0^2}(1 - v^2)\right]^{-\frac{\varepsilon}{2}}}_{1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln\left[1 - \frac{p^2}{4 m_0^2}(1 - v^2)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}$$

$$= -\frac{18 g^2}{(3!)^2} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln m_0^2 - \int_0^1 dv \; \ln\left[1 - \frac{p^2}{4 m_0^2}(1 - v^2)\right]\right] + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

---

[2] Eine Vorschrift die einer Folge (a_n) einen Reihenwert zuordnet heißt *stabil*, falls stets $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}$.

[3] Eine Vorschrift die einer Folge (a_n) einen Reihenwert zuordnet heißt *linear*, falls stets $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.