

## 9. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG QUANTENFELDTHEORIE

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 11. Semesterwoche (22./24.06.2009)

**Aufgabe 20:**

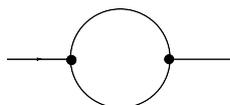
(10 Punkte)

Betrachten Sie die  $\phi^3$ -Theorie mit Langrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{g}{3!} \phi^3.$$

in  $D$ -dimensionaler Raumzeit und studieren Sie den 2-Punkt-Korrelator  $G^{(2)} \equiv G$ .

- (a) Berechnen Sie den 2-Punkt-Korrelator  $G(p^2)$  zur Ordnung  $g^2$  im Impulsraum. Hinweis: Sei  $G(p^2) = G^{[0]}(p^2) + G^{[2]}(p^2) + \dots$  die störungstheoretische Entwicklung von  $G$  mit  $G^{[0]}(p^2) = i\Delta_F(p^2)$  und  $G^{[2]}(p^2)$  der zu berechnenden nicht-trivialen 1-loop-Korrektur von der Ordnung  $g^2$ . Diese nicht-triviale Korrektur zum freien Propagator entspricht dem folgenden Diagramm:



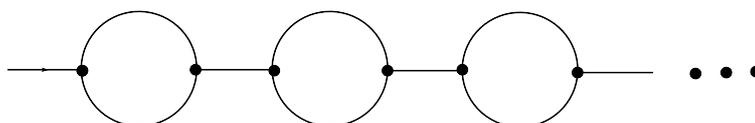
(NB: ein zweites sog. *tadpole* Diagramm liefert nur einen uninteressanten impulsunabhängigen Beitrag und soll im Folgenden unbeachtet bleiben).

Schreiben Sie diese 1-loop-Korrektur als

$$G^{[2]}(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} (-i\Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon},$$

mit zu bestimmendem  $\Sigma(p^2)$ . Weitere technische Hinweise zu dieser Rechnung finden Sie unten.

- (b) Zeigen Sie, dass  $G$  bzw.  $\Sigma$  für  $p^2 > 4m_0^2$  einen Verzweigungsschnitt entwickelt (welcher somit den Streuzuständen mit "Ruheenergie"  $> 2m_0$  entspricht).
- (c) Um den 1-Teilchen-Pol zu studieren, ist eine Resummation einer Klasse von Korrekturen höherer Ordnung erforderlich. Betrachten Sie dazu die Summe aller Beiträge zu  $G$ , welche aus Ketten von Diagrammen von Typ  $G^{[2]}$  bestehen:



Zeigen Sie, dass eine Resummation dieser Diagramme auf folgende Form des 2-Punkt-Korrelators führt:

$$G(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)}.$$

- (d) Überzeugen Sie sich davon, dass die physikalische Masse  $m$  des 1-Teilchen-Zustands nicht mehr durch  $m_0$  gegeben ist, sondern durch die Wechselwirkung eine Korrektur erfährt, die durch die i.A. transzendente Gleichung

$$m^2 = m_0^2 + \Sigma(m^2)$$

bestimmt wird. Überzeugen Sie sich zudem, dass die Wellenfunktionsrenormierung  $Z$  gegeben ist durch

$$Z = \frac{1}{1 - \frac{\partial \Sigma(p^2=m^2)}{\partial p^2}}.$$

- (e) Betrachten Sie nun eine  $D = 3$ -dimensionale Raumzeit und bestimmen Sie  $m^2$  und  $Z$  im Limes  $g^2/m_0^3 \ll 1$ .
- (f) Was passiert im Limes  $D \rightarrow 4$ ? Setzen Sie dazu  $D = 4 - \epsilon$  und isolieren Sie mögliche Divergenzen durch Entwicklung des Resultats um  $\epsilon = 0$  herum.

Weitere technische Hinweise zur Rechnung:

Die technische Schwierigkeit besteht darin, ein  $D$ -dimensionales Impulsraumintegral über das Produkt zweier Feynman-Propagatoren auszuwerten,  $\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \Delta_F(q) \Delta_F(p - q)$ . Führen Sie für diese Propagatoren jeweils eine sog. *Eigenzeit*-Darstellung ein,

$$\frac{1}{A + i\epsilon} = -i \int_0^\infty ds_1 e^{i(A+i\epsilon)s_1},$$

z.B. mit  $A = q^2 - m^2$ . Dadurch wird das  $q$ -Integral zu einem Fresnel-Integral (Gauß-Integral mit rein imaginärem Argument im Exponenten). Führen Sie zur Berechnung des Fresnel-Integrals eine Rotation der Zeitrichtung in die Euklidische Raumzeit durch,  $q^0 \rightarrow iq_E^0$ , so dass  $q^2 = q_\mu q^\mu \rightarrow -q_E^2 = -q_E^\mu q_E^\mu$ .

Für die verbleibenden *Eigenzeit*-Integrale mit Integrationsvariable  $s_1$  und  $s_2$  ist folgende Substitution nützlich:

$$s := s_1 + s_2, \quad v := \frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 \cdots = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds s \int_{-1}^1 dv \cdots$$

(Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit dieser Variablentransformation!).

Das  $s$ -Integral kann nun analytisch ausgeführt werden. Z.B. unter der Annahme, dass  $p^2 < 4m_0^2$ , kann die Kontour in der komplexen  $s$ -Ebene so rotiert werden, dass  $s \rightarrow -is$ . Das resultierende Integral entspricht der Euler-Darstellung der  $\Gamma$ -Funktion.

Das übrigbleibende  $v$ -Integral brauchen Sie im Allgemeinen nicht auszuführen, bzw. können es bei Teilaufgabe (e) in einem einfachen Spezialfall analytisch berechnen.

Lösung Teilaufgabe (a):

$$\Sigma(p^2) = -\frac{g^2}{(3!)^2} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(2 - (D/2)) \int_0^1 dv \left( m_0^2 - \frac{(1-v^2)}{4} p^2 \right)^{\frac{D}{2}-2}$$