

Quantenfeldtheorie

FSU Jena - SS 2009

Serie 08 - Lösungen

Stilianos Louca

22. Juli 2009

Erinnerung

Definieren:

$$\Phi(x) := \Phi_H(x) := \underbrace{\int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\bar{p}x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}}}_{\Phi_H^+(x)} + \underbrace{\int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\bar{p}x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger}_{\Phi_H^-(x)}$$

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle := \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} \dots 2E_{\mathbf{p}_n}} \cdot a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle$$

Mit

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger &= \underbrace{[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}_1}^\dagger]}_{\propto \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger + a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger \\ &= \propto \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger + a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \underbrace{[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}_2}^\dagger]}_{\propto \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2)} a_{\mathbf{p}_3}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger + a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}_3}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger \\ &= \propto \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger + \propto \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_3}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger + a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}_3}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger \\ &= (\dots) = \sum_{j=1}^n \propto \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_j) \cdot a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_{j-1}}^\dagger a_{\mathbf{p}_{j+1}}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger + a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger a_{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \Phi_H^+(x) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle &= \int \frac{d^d \mathbf{p}}{\mathcal{Z}} e^{-i\bar{p}x} \sum_{j=1}^n \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_j}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \propto \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_j) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n e^{-i\bar{p}_j x} |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \end{aligned}$$

Dementsprechend ist

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n | \mathcal{N} [\Phi_H(x_1), \dots, \Phi_H(x_k)] | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle &= \sum_{I \subset \{1, \dots, k\}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n | \left[\prod_{j \in I} \Phi_H^-(x_j) \right] \left[\prod_{j \notin I} \Phi_H^+(x_j) \right] | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle \\ &= \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ |I|=k/2}} \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n | \left[\prod_{j \in I} \Phi_H^-(x_j) \right] \left[\prod_{j \notin I} \Phi_H^+(x_j) \right] | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle \end{aligned}$$

Insbesondere verschwinden für Φ^k -theorien mit k ungerade, die Beiträge aller $S^{(l)}$ -Dyson-Terme mit l ungerade zur $m \mapsto m$ Streuamplitude (da $k \cdot l$ ungerade).

Aufgabe 17

Lemma 1

Jeder endliche, ungerichtete Baum¹ (V, E) besitzt genau $|V| - 1$ edges (innere Linien).

Beweis: O.B.d.A können wir den Baum teilgeordnet annehmen, dazu sei $r \in V$ der root-node. Wir schreiben $v \leq w$ für zwei vertices $v, w \in V$ falls v ein child von w ist und V_w bzw. E_w für die vertices bzw. edges des Unterbaumes von w . Offensichtlich gilt für ein leaf $l \in V$ dass $|V_l| = 1$ und $|E_l| = 0$. Induktiv (über $|V|$) folgt dann

$$|E| - |V| = |E_r| - |V_r| = \sum_{v < r} (1 + |E_v|) - \left[1 + \sum_{v < r} |V_v| \right] = \sum_{v < r} \underbrace{[|E_v| - |V_v| - 1]}_0 - 1 = -1$$

nach Induktionsannahme

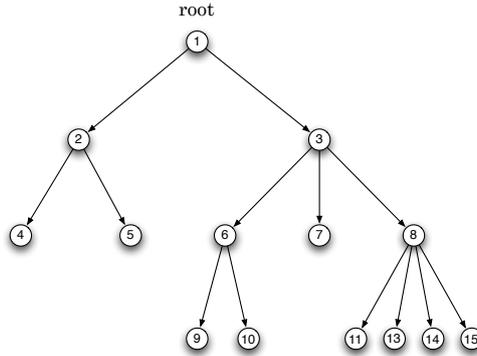


Abbildung 1: Teilgeordneter Baum.

Definition: Loop-Anzahl

Sei (V, E) ein endlicher, ungerichteter, zusammenhängender Graph. Ist es möglich durch Abtrennung eines edge $\{e_1, e_2\} \in E$ einen neuen zusammenhängenden Graphen $(V, E \setminus \{u_1, u_2\})$ mit $n - 1$ loops zu erhalten (*vereinfachbar*), so sagt man (V, E) besitzt n loops. Wird der Graph durch jede edge-Entfernung nicht-zusammenhängend (\rightarrow nicht-vereinfachbar), so hat er 0 loops.[1]

Bemerkungen:

- Durch sukzessives entfernen von edges erhält man stets eine endliche Folge von Graphen $(V, E) = (V, E_0), \dots, (V, E_N)$, so dass (V, E_N) noch zusammenhängend, jedoch nicht mehr vereinfachbar ist. Insbesondere hat dann (V, E) genau N loops.
- Die Definition ist eindeutig.

Beweis: Seien $(V, E) = (V, E_0), \dots, (V, E_N)$ und $(V, E) = (V, E'_0), \dots, (V, E'_M)$ zwei Folgen von Graphen, so dass jeweils E_{i+1} bzgl. E_i (bzw. E'_{i+1} bzgl. E'_i) um einen edge reduziert ist, alle $(V, E_0), \dots, (V, E_N)$ und $(V, E'_0), \dots, (V, E'_M)$ zusammenhängend sind, jedoch (V, E_N) und (V, E'_M) nicht mehr vereinfachbar sind. Zu zeigen wäre: $M = N$.

Tatsächlich, ist jeder nicht-vereinfachbarer, zusammenhängender Graph ein Baum. Bekanntlich besitzt ein Baum mit V vertices genau $|V| - 1$ edges, das heißt $|E_N| = |E'_M|$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Behauptung

Für jeden zusammenhängenden, ungerichteten, endlichen Graphen (V, E) mit n loops gilt $n = |E| - |V| + 1$.

Beweis: Nach obiger Bemerkung existiert eine absteigende (sprich sukzessive vereinfachte) Folge $(V, E) = (V, E_0), \dots, (V, E_n)$ zusammenhängender Graphen, so dass E_{i+1} sich von E_i um einen einzelnen edge unterscheidet und (V, E_n) nicht vereinfachbar ist. Definitionsgemäß besitzt (V, E_n) keine loops und per Konstruktion genau $|E_n| = |E| - n$ edges. Demnach

$$|E| = |E_n| + n \stackrel{\text{Lemma 1}}{=} \underbrace{|V_n|}_{|V|} + n - 1$$

\square

¹Ein Baum ist ein azyklischer, zusammenhängender Graph.

Aufgabe 18

Beginnend mit der S -Matrix (Ordnung g^2 , Übungsaufgabe 15):

$$S^{(0)} = 1$$

$$S^{(1)} = -\frac{ig}{3!} \int d^D x \mathcal{T} [\Phi(x), \Phi(x), \Phi(x)] \stackrel{\text{Wick}}{=} -\frac{ig}{3!} \int d^D x \left\{ \mathcal{N} [\Phi(x_1), \Phi(x_1), \Phi(x_1)] + 6\overline{\Phi(x_1)\Phi(x_1)\Phi(x_1)} \right\}$$

$$S^{(2)} = -\frac{1}{2!} \left(\frac{g}{3!}\right)^2 \int d^D x d^D y \left\{ \mathcal{N} [\Phi_x^3, \Phi_y^3] + 6\overline{\Phi_x\Phi_x}\mathcal{N} [\Phi_x, \Phi_y^3] + 9\overline{\Phi_x\Phi_y}\mathcal{N} [\Phi_x^2, \Phi_y^2] \right\}$$

$$+ \left\{ 18\overline{\Phi_x\Phi_x}\overline{\Phi_x\Phi_y}\mathcal{N} [\Phi_y^2] + 9\overline{\Phi_x\Phi_x}\overline{\Phi_y\Phi_y}\mathcal{N} [\Phi_x, \Phi_y] + 18\overline{\Phi_x\Phi_y}\overline{\Phi_x\Phi_y}\mathcal{N} [\Phi_x, \Phi_y] \right\}$$

$$+ \left\{ 9\overline{\Phi_x\Phi_x}\overline{\Phi_x\Phi_y}\overline{\Phi_y\Phi_y} + 6\overline{\Phi_x\Phi_y}\overline{\Phi_x\Phi_y}\overline{\Phi_x\Phi_y} \right\}$$

und den entsprechenden Feynman-Diagrammen von $S^{(2)}$

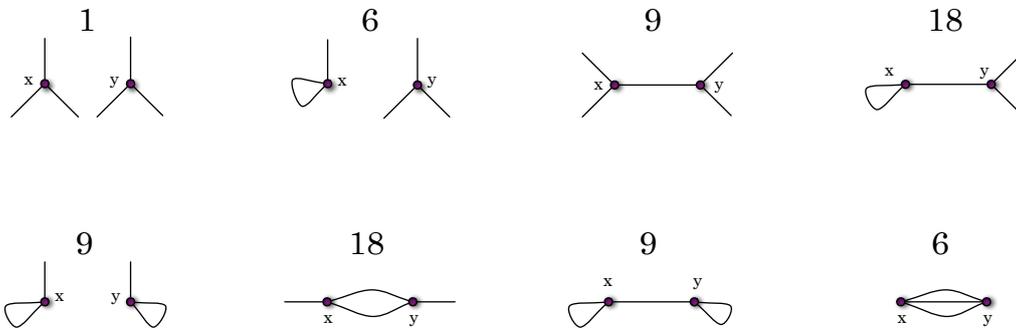


Abbildung 2: Feynman-Diagramme von $S^{(2)}$.

Nach obigen Überlegungen trägt $S^{(1)}$ nicht zur $2 \rightarrow 2$ Streuung bei. Gleichzeitig liefert $S^{(2)}$ nur Beiträge zusammenhängender, amputierter Feynman-Diagramme mit 4 freien Linien.



Abbildung 3: Für die $2 \rightarrow 2$ Streuamplitude relevantes Feynman-Diagramm.

Können also schreiben

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | S^{(2)} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= -\frac{1}{2!} \left(\frac{g}{3!} \right)^2 \int d^D x d^D y \langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | 9 \overline{\Phi_x \Phi_y} \mathcal{N} [\Phi_x^2, \Phi_y^2] | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle \\
&= -\frac{9}{2!} \left(\frac{g}{3!} \right)^2 \int d^D x d^D y \underbrace{\overline{\Phi_x \Phi_y}}_{i\Delta_F(x-y)} [\langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | 2\Phi_x^- \Phi_x^- \Phi_y^+ \Phi_y^+ | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle + \langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | 4\Phi_x^- \Phi_y^- \Phi_x^+ \Phi_y^+ | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle] \\
&= -\frac{9}{2!} \left(\frac{g}{3!} \right)^2 \int d^D x d^D y i\Delta_F(x-y) \cdot \left\{ 2 \cdot 2e^{i\bar{q}_1 x + i\bar{q}_2 x} \underbrace{\langle 0 | 0 \rangle}_1 2e^{-i\bar{p}_1 y - i\bar{p}_2 y} \right. \\
&\quad \left. + 4 \cdot [e^{i\bar{q}_1 x + i\bar{q}_2 y} + e^{i\bar{q}_1 y + i\bar{q}_2 x}] \langle 0 | \Phi_x^+ \Phi_y^+ | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle \right\} \\
&= -18 \left(\frac{g}{3!} \right)^2 \int d^D x d^D y i\Delta_F(x-y) \left\{ 2e^{i(\bar{q}_1 x + \bar{q}_2 x - \bar{p}_1 y - \bar{p}_2 y)} + [e^{i\bar{q}_1 x + i\bar{q}_2 y} + e^{i\bar{q}_1 y + i\bar{q}_2 x}] \cdot [e^{-i\bar{p}_1 x - i\bar{p}_2 y} + e^{-i\bar{p}_1 y - i\bar{p}_2 x}] \right\} \\
&= -\frac{i36}{(2\pi)^D} \left(\frac{g}{3!} \right)^2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int d^D x d^D y d^D p \frac{e^{i(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - p)x - i(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 - p)y}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
&\quad - \frac{i18}{(2\pi)^D} \left(\frac{g}{3!} \right)^2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int d^D x d^D y d^D p \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \left[e^{i(\bar{q}_1 - \bar{p}_1 - p)x + i(\bar{q}_2 - \bar{p}_2 + p)y} + e^{i(\bar{q}_1 - \bar{p}_2 - p)x + i(\bar{q}_2 - \bar{p}_1 + p)y} \right. \\
&\quad \left. + e^{i(\bar{q}_2 - \bar{p}_1 - p)x + i(\bar{q}_1 - \bar{p}_2 + p)y} + e^{i(\bar{q}_2 - \bar{p}_2 - p)x + i(\bar{q}_1 - \bar{p}_1 + p)y} \right] \\
&= -i18(2\pi)^D \left(\frac{g}{3!} \right)^2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \frac{d^D p}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \left[2\delta(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - p)\delta(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 - p) + \delta(\bar{q}_1 - \bar{p}_1 - p)\delta(\bar{q}_2 - \bar{p}_2 + p) \right. \\
&\quad \left. + \delta(\bar{q}_1 - \bar{p}_2 - p)\delta(\bar{q}_2 - \bar{p}_1 + p) + \delta(\bar{q}_2 - \bar{p}_1 - p)\delta(\bar{q}_1 - \bar{p}_2 + p) + \delta(\bar{q}_2 - \bar{p}_2 - p)\delta(\bar{q}_1 - \bar{p}_1 + p) \right] \\
&= i(2\pi)^D \delta(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 - \bar{q}_1 - \bar{q}_2) \lim_{\varepsilon \searrow 0} (-18) \left(\frac{g}{3!} \right)^2 \left[\frac{2}{(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{(\bar{q}_1 - \bar{p}_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{(\bar{q}_1 - \bar{p}_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\bar{q}_2 - \bar{p}_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{(\bar{q}_2 - \bar{p}_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right] \\
&\stackrel{\delta}{=} i(2\pi)^D \delta(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 - \bar{q}_1 - \bar{q}_2) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \underbrace{(-36) \left(\frac{g}{3!} \right)^2 \left[\frac{1}{(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{(\bar{q}_1 - \bar{p}_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{(\bar{q}_1 - \bar{p}_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right]}_{\mathcal{M}(|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle \rightarrow |\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_3\rangle)}
\end{aligned}$$

das heißt

$$\boxed{\mathcal{M}(|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle \rightarrow |\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_3\rangle) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (-g^2) \left[\frac{1}{(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{(\bar{q}_1 - \bar{p}_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{(\bar{q}_1 - \bar{p}_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right]}$$

Alternative (Feynman-Regeln): Bezüglich der Wechselwirkungs-Relationen bei $2 \rightarrow 2$ Streuung im obigen Diagramm (3) ergeben sich 3 verschiedene Kombinationen, abgebildet in (4).

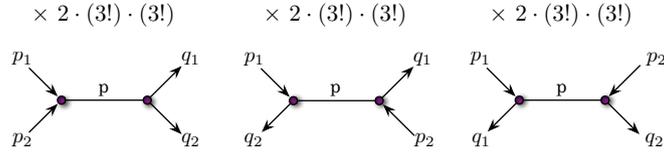


Abbildung 4: Zur $|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle \rightarrow |\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2\rangle$ Streuung beitragende Diagramme, jeweils gewichtet mit Kombinatorik-Faktor. Die beiden $3!$ Fakultäten ergeben sich aus den beiden Vertizes, der Faktor $\times 2$ durch Vertauschung der beiden Vertizes.

Nach Feynman können wir schreiben²

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | S^{(2)} | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle &= \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{ig}{3!} \right)^2 \cdot (3!)(3!)2 \cdot \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{i \cdot (2\pi)^D \cdot (2\pi)^D}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \left\{ \delta^{(D)}((\bar{p}_1 + \bar{p}_2) - p) \cdot \delta^{(D)}(p - (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)) \right. \\ &\quad \left. + \delta^{(D)}(\bar{p}_1 - \bar{q}_2 - p) \cdot \delta^{(D)}(p + \bar{p}_2 - \bar{q}_1) + \delta^{(D)}(\bar{p}_1 - p - \bar{q}_1) \cdot \delta^{(D)}(p + \bar{p}_2 - \bar{q}_2) \right\} \\ &= i(2\pi)^D \delta^{(D)}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 - \bar{q}_1 - \bar{q}_2) \cdot (-g^2) \underbrace{\left[\frac{1}{(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{(\bar{q}_1 - \bar{p}_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{(\bar{p}_1 - \bar{q}_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right]}_{\mathcal{M}(|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle \rightarrow |\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2\rangle)} \end{aligned}$$

Aufgabe 19

Notation

Verwende \mathbf{q} bzw. \mathbf{p} für Zustände von χ bzw. Ψ . Außerdem

$$E_{\mathbf{p}}^M := \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}, \quad E_{\mathbf{q}}^m := \sqrt{m^2 + \mathbf{q}^2}$$

und

$$\bar{p} := (E_{\mathbf{p}}^M, \mathbf{p}), \quad \bar{q} := (E_{\mathbf{q}}^m, \mathbf{q})$$

Vorbetrachtung

Für Zustände $|\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\rangle$ und $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m\rangle$ jeweils erzeugt durch die Felder χ und Φ gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m \rangle = \delta_{n0} \delta_{m0}$$

so dass

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \Phi_x \chi_x^2 | \mathbf{p}_M \rangle &= \underbrace{\langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | \chi_x^- \chi_x^- \Phi_x^- | \mathbf{p}_M \rangle}_0 + \underbrace{\langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | \chi_x^- \chi_x^- \Phi_x^+ | \mathbf{p}_M \rangle}_{2e^{i\bar{q}_1 x + \bar{q}_2 x - \bar{p}_M x} \langle 0 | 0 \rangle} + \underbrace{\langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | \chi_x^- \chi_x^+ \Phi_x^- | \mathbf{p}_M \rangle}_0 \\ &\quad + \underbrace{\langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | \chi_x^- \chi_x^+ \Phi_x^+ | \mathbf{p}_M \rangle}_0 + \underbrace{\langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | \chi_x^+ \chi_x^+ \Phi_x^- | \mathbf{p}_M \rangle}_0 + \underbrace{\langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | \chi_x^+ \chi_x^+ \Phi_x^+ | \mathbf{p}_M \rangle}_0 \end{aligned}$$

In Störungsrechnung 1. Ordnung ist

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | S^{(1)} | \mathbf{p}_M \rangle &= -ig \int d^D x \langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | \mathcal{T} [\Phi_x \chi_x^2] | \mathbf{p}_M \rangle \\ &\stackrel{\text{Wick}}{=} -ig \int d^D x \left\{ \langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | \mathcal{N} [\Phi_x \chi_x^2] | \mathbf{p}_M \rangle + \overline{\Phi_x \chi_x} \underbrace{\langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | \chi_x | \mathbf{p}_M \rangle}_0 + \overline{\chi_x \chi_x} \underbrace{\langle \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 | \Phi_x | \mathbf{p}_M \rangle}_0 \right\} \\ &= -i2g \int d^D x e^{ix(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - \bar{p}_M)} = i \underbrace{(-2g)}_{\mathcal{M}(|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle \rightarrow |\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2\rangle)} (2\pi)^D \cdot \delta(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - \bar{p}_M) \end{aligned}$$

²Grenzwertübergang $\lim_{\varepsilon \searrow 0}$ impliziert.

und demnach

$$d\Gamma = \underbrace{\frac{1}{2!}}_{\text{Ununterscheidbarkeit der Ausgangsteilchen}} \frac{2g^2}{M} \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^d \mathbf{q}_1}{2E_{\mathbf{q}_1}} \frac{d^d \mathbf{q}_2}{2E_{\mathbf{q}_2}} \cdot \delta^{(D)}(\bar{p}_M - \bar{q}_1 - \bar{q}_2)$$

Insbesondere ergibt sich die Zerfallsrate des Teilchens $|\mathbf{p}_M\rangle$ gemäß

$$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{2g^2}{M2!} \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{d^d \mathbf{q}_1}{2E_{\mathbf{q}_1}} \frac{d^d \mathbf{q}_2}{2E_{\mathbf{q}_2}} \cdot \delta^{(d)}(\mathbf{p}_M - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \cdot \delta(E_{\mathbf{p}_M}^M - E_{\mathbf{q}_1}^m - E_{\mathbf{q}_2}^m)$$

$$= \frac{2g^2}{M2!} \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{d^d \mathbf{q}_1}{2E_{\mathbf{q}_1}^m 2E_{\mathbf{p}_M - \mathbf{q}_1}^m} \cdot \delta(E_{\mathbf{p}_M}^M - E_{\mathbf{q}_1}^m - E_{\mathbf{p}_M - \mathbf{q}_1}^m)$$

$$\stackrel{\text{o.B.d.A.}}{\stackrel{\mathbf{p}_M=0}{=}} \frac{2g^2}{M2!} \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2E_{\mathbf{q}}^m)^2} \cdot \delta(M - 2E_{\mathbf{q}}^m)$$

$$= \frac{2g^2}{M2!} \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int \Omega_{\mathbf{q}} \int_0^\infty \frac{dq q^2}{(2E_q^m)^2} \cdot \delta(M - 2E_q^m)$$

$$\stackrel{E:=2E_q}{=} \frac{2g^2}{M2!} \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int \Omega_{\mathbf{q}} \int_{2m}^\infty dE \frac{q(E)^2}{E^2} \cdot \frac{\delta(M - E)}{\frac{dE}{dq}} \quad \Bigg| \quad \text{Beachte: } M^2 > 4m^2$$

$$= \frac{2g^2}{M2!} \frac{1}{4(2\pi)^{d-1}} \int \Omega_{\mathbf{q}} \int_{2m}^\infty dE \frac{q(E)}{E} \cdot \delta(M - E) = \frac{g^2}{4M^2(2\pi)^{d-1}} \cdot \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} \int \underbrace{\Omega_{\mathbf{q}}}_{4\pi}$$

Insbesondere ergibt sich eine Lebensdauer von

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma} = \frac{2M^2(2\pi)^{d-1}}{\pi g^2 \sqrt{M^2 - 4m^2}}}$$

Literatur

- [1] *Quantum field theory and critical phenomena*, J.Z. Justin
Oxford University Press, 2002