

# Quantenfeldtheorie

FSU Jena - SS 2009

Serie 07 - Lösungen

Stilianos Louca

16. Juli 2010

## Erinnerung

### Definitionen

**Zustände:** In Impulsdarstellung

$$|\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n\rangle := \frac{1}{\sqrt{n!}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \dots \sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle$$

mit

$$\langle \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_m | \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n \rangle = \frac{(2\pi)^{nd}}{n!} 2E_{\mathbf{p}_1} \dots 2E_{\mathbf{p}_n} \delta_{nm} \cdot \sum_{\sigma \in \text{Sym}(n)} \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_{\sigma(n)}) \dots \delta(\mathbf{q}_n - \mathbf{p}_{\sigma(1)})$$

**Zeitgeordnetes Produkt von Feldoperatoren**  $A_1, \dots, A_n$ :

$$\mathcal{T}[A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)] := \mathcal{T}[A_1, \dots, A_n](x_1, \dots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_n} \left[ \prod_{j=1}^{n-1} \Theta(x_{\sigma(j+1)}^0 - x_{\sigma(j)}^0) \right] \cdot A_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) \dots A_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)})$$

wobei  $\Theta(0) := \frac{1}{2}$ . Bemerke dass  $\mathcal{T}[A(x_1), A(x_1)] = A(x_1)A(x_1)$ .

**Normalgeordnetes Produkt:**

$$\mathcal{N}[\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)] := \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \left[ \prod_{k \in I} \Phi^-(x_k) \right] \cdot \left[ \prod_{k \notin I} \Phi^+(x_k) \right]$$

wobei

$$\underbrace{\Phi(x)}_{\Phi_I(x)} = e^{iH_0 x^0} \Phi_s(\mathbf{x}) e^{-iH_0 x^0} = \Phi^+(x) + \Phi^-(x) \quad , \quad \Phi^+(x) = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\bar{p}x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \cdot a_{\mathbf{p}} \quad , \quad \Phi^-(x) = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\bar{p}x}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \cdot a_{\mathbf{p}}^\dagger \quad (1)$$

(Wechselwirkungsbild)

**Kontraktion:**

$$\overbrace{\Phi(x_1)\Phi(x_2)} := \mathcal{T}[\Phi(x_1), \Phi(x_2)] - \mathcal{N}[\Phi(x_1), \Phi(x_2)]$$

**Konventionen:** Für 4er Impuls  $p = (p^0, \dots, p^3)$  setzen

$$\bar{p} := (|p^0|, p^1, \dots, p^3) = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$$

Für 4er Vektor  $x$  setzen  $xp := x^0 p^0 - \mathbf{x}\mathbf{p}$ .

## Eigenschaften

Propagatoren:

$$\Delta^+(x_1 - x_2) = \frac{1}{i} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\bar{p}(x_1 - x_2)}}{2E_{\mathbf{p}}} = [\Phi^+(x_1), \Phi^-(x_2)] = \langle 0 | \Phi(x_1) \Phi(x_2) | 0 \rangle$$

$$\Delta^-(x_1 - x_2) = \frac{1}{i} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\bar{p}(x_1 - x_2)}}{2E_{\mathbf{p}}} = [\Phi^+(x_2), \Phi^-(x_1)] = \langle 0 | \Phi(x_2) \Phi(x_1) | 0 \rangle$$

$$\Delta_F(x_1 - x_2) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ip(x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \Theta(x_1^0 - x_2^0) \Delta^+(x_1 - x_2) + \Theta(x_2^0 - x_1^0) \Delta^-(x_1 - x_2) = \frac{1}{i} \overline{\Phi(x_1) \Phi(x_2)}$$

$$\Delta_R(x) = \Theta(x^0) \underbrace{[\Delta^+(x) - \Delta^-(x)]}_{\Delta(x)}, \quad \Delta_A(x) = -\Theta(-x^0) \Delta(x)$$

$$\Delta(x_1 - x_2) = [\Phi(x_1), \Phi^\dagger(x_2)]$$

Bemerke dass  $\Delta^+(0) = \Delta^-(0)$ .

**Kommutatoren:**

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = 0, \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = \underbrace{(2\pi)^d}_{\neq} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p})$$

$$[\Phi^\pm(x_1), \underbrace{\overline{\Phi(x_2) \Phi(x_3)}}_{\substack{\text{skalärer} \\ \text{Operator}}}] = 0$$

$$\Rightarrow [\mathcal{N}[\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)], \overline{\Phi(y_1) \Phi(y_2)}] = 0$$

## Wicksches Theorem

Für skalares Feld  $J : x \mapsto J(x)$ :

$$\mathcal{T} \left[ \exp \left[ -i \int d^D x J(x) \Phi(x) \right] \right] = \mathcal{N} \left[ \exp \left[ -i \int d^D x J(x) \Phi(x) \right] \right] \exp \left[ -\frac{i}{2} \int \int d^D x d^D y J(x) \Delta_F(x - y) J(y) \right]$$

Insbesondere:

$$\mathcal{T} [\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)] = \sum_{\substack{I \subset \mathcal{I}_n \\ \forall (i_1, i_2), (j_1, j_2) \in I : |\{i_1, i_2, j_1, j_2\}| = 4}} \left[ \prod_{(j_1, j_2) \in I} \overline{\Phi(x_{j_1}) \Phi(x_{j_2})} \right] \mathcal{N} \{ \Phi(x_j) \mid j \notin \{i_1, i_2\} \forall (i_1, i_2) \in I \}$$

wobei

$$\mathcal{I}_n := \left\{ (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 : i < j \right\}$$

Z.B.

$$\mathcal{T} [\Phi(x_1), \Phi(x_2), \Phi(x_3)] = \mathcal{N} [\Phi(x_1), \Phi(x_2), \Phi(x_3)] + \overline{\Phi(x_1) \Phi(x_2)} \underbrace{\mathcal{N} [\Phi(x_3)]}_{\Phi(x_3)} + \overline{\Phi(x_1) \Phi(x_3)} \underbrace{\mathcal{N} [\Phi(x_2)]}_{\Phi(x_2)} + \overline{\Phi(x_2) \Phi(x_3)} \underbrace{\mathcal{N} [\Phi(x_1)]}_{\Phi(x_1)}$$

## S-Matrix

Propagator  $U_I(-\infty, \infty) =: S$  im Wechselwirkungsbild:

$$S = \mathcal{T} \left[ \exp \left( -i \int d^D x \mathcal{H}_I(x) \right) \right]$$

mit

$$H_I(t) := U_0^{-1}(t, t_0) V(t) U_0(t, t_0) = \int d^d \mathbf{x} \underbrace{U_0^{-1}(t, t_0) \mathcal{V}(\mathbf{x}, t) U_0(t, t_0)}_{\mathcal{H}_I(\mathbf{x}, t)}$$

$$H(t) = H_0 + \underbrace{\int d^d \mathcal{V}(\mathbf{x}, t)}_{V(t)}$$

und ungestörtem Propagator  $U_0(t, t_0) = \exp[-i(t - t_0)H_0]$ . Sind  $|i\rangle, |f\rangle$  Eigenzustände von  $H_0$ ,  $U(t, t_0)$  der Propagator von  $H$  und  $|i(t)\rangle_{\text{ww}} := U_0^\dagger(t, t_0)U(t, t_0)|i\rangle$ , dann ist

$$\langle f|U(t, t_0)|i\rangle = \langle f|U_0(t, t_0)|i(t)\rangle_{\text{ww}} = \langle U_0^\dagger(t, t_0)f|i(t)\rangle_{\text{ww}} \stackrel{U_0|f\rangle=|f\rangle}{=} \langle f|i(t)\rangle_{\text{ww}} = \langle f|U_I(t, t_0)|i(t_0)\rangle_{\text{ww}} = \langle f|U_I(t, t_0)|i\rangle$$

Im Grenzfall  $t \rightarrow \infty, t_0 \rightarrow -\infty$  (Experiment läuft schon unendlich lange, bis  $\infty$ ) ergibt sich die Übergangswahrscheinlichkeit

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow f} = |\langle f|U(\infty, -\infty)|i\rangle|^2 = |\langle f|S|i\rangle|^2$$

## Vorbetrachtungen

Per Konstruktion von  $\mathcal{N}$  (Vernichter *nach rechts*) ist

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)]|0\rangle &= \Phi^-(x_1) \dots \Phi^-(x_n)|0\rangle = \int \dots \int \frac{d^d \mathbf{p}_1}{\varkappa} \dots \frac{d^d \mathbf{p}_n}{\varkappa} \frac{e^{i\bar{p}_1 x_1}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}}} \dots \frac{e^{i\bar{p}_n x_n}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_n}}} \cdot a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= \frac{1}{\varkappa^n} \int d^d \mathbf{p}_1 \dots d^d \mathbf{p}_n \frac{e^{i\bar{p}_1 x_1 + \dots + i\bar{p}_n x_n}}{2E_{\mathbf{p}_1} \dots 2E_{\mathbf{p}_n}} |\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n\rangle \end{aligned}$$

und demnach

$$\langle 0|\mathcal{N}[\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)]|0\rangle = \delta_{0,n} \quad (2)$$

und

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_m | \mathcal{N}[\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)] | 0 \rangle &= m! \cdot e^{i\bar{q}_1 x_1 + \dots + i\bar{q}_m x_m} \cdot \delta_{mn} \\ &= m! \cdot e^{i\bar{q}_1 x_1 + \dots + i\bar{q}_m x_m} \cdot \delta_{mn} \end{aligned} \quad (3)$$

## Aufgabe 14

(a) Im Wechselwirkungsbild ergibt sich die Hamilton-Dichte gemäß

$$\mathcal{H}_I = U_0^\dagger(t, t_0) \mathcal{V}(\mathbf{x}, t) U_0(t, t_0) = J(\mathbf{x}, t) \underbrace{U_0^\dagger(t, t_0) \Phi_s(\mathbf{x}) U_0(t, t_0)}_{=: \Phi(x)} = J(\mathbf{x}, t) \Phi(x)$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach gegeben durch

$$\mathcal{P}(0) = |\langle 0|S|0\rangle|^2 = \left| \langle 0| \mathcal{S} \exp \left[ -i \int d^D x \mathcal{H}_I(x) \right] |0\rangle \right|^2 = \left| \langle 0| \mathcal{S} \exp \left[ -i \int d^D x J(\mathbf{x}, t) \Phi(x) \right] |0\rangle \right|^2$$

(b) Unter Beachtung der obigen Überlegungen schreiben wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(0) &\stackrel{\text{Wick}}{=} \left| \langle 0 | \mathcal{N} \left\{ \exp \left[ -i \int d^D x J(x) \Phi(x) \right] \right\} \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^D y d^D z J(y) \Delta_F(y-z) J(z) \right] | 0 \rangle \right|^2 \\
&= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^D x_1 \dots d^D x_n \langle 0 | \mathcal{N} [J(x_1) \Phi(x_1), \dots, J(x_n) \Phi(x_n)] | 0 \rangle \overbrace{\exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^D y d^D z J(y) \Delta_F(y-z) J(z) \right]}^{\text{skalärer Operator}} \right|^2 \\
&\stackrel{(2)}{=} \left| \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^D y d^D z J(y) \Delta_F(y-z) J(z) \right] \right|^2 \\
&= \left| \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{p} d^D y d^D z}{\varkappa 2E_{\mathbf{p}}} J(y) J(z) \left( e^{-i\bar{p}(y-z)} \Theta(y^0 - z^0) + e^{i\bar{p}(y-z)} \Theta(z^0 - y^0) \right) \right] \right|^2 \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{p} d^D y d^D z}{\varkappa 2E_{\mathbf{p}}} J(y) J(z) \left[ e^{-i\bar{p}(y-z)} \underbrace{\left( \Theta(y^0 - z^0) + \Theta(z^0 - y^0) \right)}_1 + e^{i\bar{p}(y-z)} \underbrace{\left( \Theta(z^0 - y^0) + \Theta(y^0 - z^0) \right)}_1 \right] \right\} \\
&= \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{p} d^D y d^D z}{\varkappa 2E_{\mathbf{p}}} J(y) J(z) \left( e^{-iE_{\mathbf{p}}(y^0 - z^0)} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{y} - \mathbf{z})} + e^{iE_{\mathbf{p}}(y^0 - z^0)} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{y} - \mathbf{z})} \right) \right] \\
&= \exp \left[ -\int \frac{d^d \mathbf{p} d^D y d^D z}{\varkappa 2E_{\mathbf{p}}} J(y) J(z) e^{-i\bar{p}(y-z)} \right] \stackrel{J \text{ reell}}{=} \exp \left[ -\int \frac{d^d \mathbf{p}}{\varkappa} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} J(\bar{p}) J^*(\bar{p}) \right]
\end{aligned}$$

(c) Ähnlich zu Teil (b) schreiben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(m) &= \underbrace{\frac{1}{m!}}_{\text{Ununterscheidbarkeit der Teilchen}} \cdot \int d^d \mathbf{q}_1 \dots d^d \mathbf{q}_m \underbrace{\frac{1}{\varkappa^n 2E_{\mathbf{q}_1} \dots 2E_{\mathbf{q}_m}}}_{\text{Normierung von } |\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_m\rangle} \overbrace{|\langle \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_m | S | 0 \rangle|^2}^{\mathcal{P}_{0 \rightarrow |\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_m\rangle}} \\
&= \frac{1}{\varkappa^n m!} \int \frac{d^d \mathbf{q}_1 \dots d^d \mathbf{q}_m}{2E_{\mathbf{q}_1} \dots 2E_{\mathbf{q}_m}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^D x_1 \dots d^D x_n \langle \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_m | \mathcal{N} [J(x_1)\Phi(x_1), \dots, J(x_n)\Phi(x_n)] | 0 \rangle \right. \\
&\quad \left. \cdot \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^D y d^D z J(y) \Delta_F(y-z) J(z) \right] \right|^2 \\
&\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\varkappa^m m!} \int \frac{d^d \mathbf{q}_1 \dots d^d \mathbf{q}_m}{2E_{\mathbf{q}_1} \dots 2E_{\mathbf{q}_m}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^D x_1 \dots d^D x_n \delta_{mn} \cdot J(x_1) \dots J(x_n) \cdot m! \cdot e^{i\bar{q}_1 x_1 + \dots + i\bar{q}_m x_m} \right|^2 \cdot e^{-\lambda} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\varkappa^m m!} \cdot \int \frac{d^d \mathbf{q}_1 \dots d^d \mathbf{q}_m}{2E_{\mathbf{q}_1} \dots 2E_{\mathbf{q}_m}} \left| \frac{(-i)^m}{m!} \int d^D x_1 \dots d^D x_m J(x_1) \dots J(x_m) m! \cdot e^{i\bar{q}_1 x_1 + \dots + i\bar{q}_m x_m} \right|^2 \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\varkappa^m m!} \int d^d \mathbf{q}_1 \dots d^d \mathbf{q}_m \frac{\overbrace{|J(-\bar{q}_1)|}^{J^*(\bar{q}_1)} \dots \overbrace{|J(-\bar{q}_m)|}^{J^*(\bar{q}_m)}}{2E_{\mathbf{q}_1} \dots 2E_{\mathbf{q}_m}} = \frac{e^{-\lambda}}{\varkappa^m m!} \int d^d \mathbf{q}_1 \dots d^d \mathbf{q}_m \prod_{j=1}^m \frac{|J(\bar{q}_j)|^2}{2E_{\mathbf{q}_j}} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{m!} \underbrace{\left[ \int \frac{d^d \mathbf{q}}{\varkappa} \frac{|J(\bar{q})|^2}{2E_{\mathbf{q}}} \right]^m}_{\lambda^m}
\end{aligned}$$

(d) Der Erwartungswert der Teilchenzahl ist gegeben durch

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathcal{P}(n) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}}_{e^\lambda} = \lambda$$

□

## Aufgabe 15

Beginnend mit

$$S = T \exp \left[ -i \int d^D x \mathcal{H}_I(x) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\left( \frac{-ig}{3!} \right)^n \int \dots \int d^D x_1 \dots d^D x_n \mathcal{T} [\Phi^3(x_1), \dots, \Phi^3(x_n)]}_{\times n} \underbrace{\hspace{10em}}_{S^{(n)}}$$

schreiben wir:

$$S^{(0)} = 1$$

$$S^{(1)} = -\frac{ig}{3!} \int d^D x \mathcal{T} [\Phi(x), \Phi(x), \Phi(x)] \stackrel{\text{Wick}}{=} -\frac{ig}{3!} \int d^D x \left\{ \mathcal{N} [\Phi(x_1), \Phi(x_1), \Phi(x_1)] + 3! \overline{\Phi(x_1) \Phi(x_1) \Phi(x_1)} \right\}$$

$$S^{(2)} = -\frac{1}{2!} \left( \frac{g}{3!} \right)^2 \int d^D x d^D y \mathcal{T} [\Phi^3(x), \Phi^3(y)]$$

$$\stackrel{\text{Wick}}{=} -\frac{1}{2!} \left( \frac{g}{3!} \right)^2 \int d^D x d^D y \left\{ \mathcal{N} [\Phi_x^3, \Phi_y^3] + 3 \overline{\Phi_x \Phi_x} \mathcal{N} [\Phi_x, \Phi_y^3] + 3 \cdot 3 \overline{\Phi_x \Phi_y} \mathcal{N} [\Phi_x^2, \Phi_y^2] + 3 \overline{\Phi_y \Phi_y} \mathcal{N} [\Phi_x^3, \Phi_y] \right\}$$

$$+ \left\{ 3 \cdot 3 \overline{\Phi_x \Phi_x} \overline{\Phi_x \Phi_y} \mathcal{N} [\Phi_y^2] + 3 \cdot 3 \overline{\Phi_x \Phi_x} \overline{\Phi_y \Phi_y} \mathcal{N} [\Phi_x, \Phi_y] + 3 \cdot 3 \cdot 2 \overline{\Phi_x \Phi_y} \overline{\Phi_x \Phi_y} \mathcal{N} [\Phi_x, \Phi_y] \right\}$$

$$+ \left\{ 3 \cdot 3 \overline{\Phi_x \Phi_y} \overline{\Phi_y \Phi_y} \mathcal{N} [\Phi_x^2] + 3 \cdot 3 \overline{\Phi_x \Phi_x} \overline{\Phi_x \Phi_y} \overline{\Phi_y \Phi_y} + 3 \cdot 2 \overline{\Phi_x \Phi_y} \overline{\Phi_x \Phi_y} \overline{\Phi_x \Phi_y} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2!} \left( \frac{g}{3!} \right)^2 \int d^D x d^D y \left\{ \mathcal{N} [\Phi_x^3, \Phi_y^3] + 6 \overline{\Phi_x \Phi_x} \mathcal{N} [\Phi_x, \Phi_y^3] + 9 \overline{\Phi_x \Phi_y} \mathcal{N} [\Phi_x^2, \Phi_y^2] \right\}$$

$$+ \left\{ 18 \overline{\Phi_x \Phi_x} \overline{\Phi_x \Phi_y} \mathcal{N} [\Phi_y^2] + 9 \overline{\Phi_x \Phi_x} \overline{\Phi_y \Phi_y} \mathcal{N} [\Phi_x, \Phi_y] + 18 \overline{\Phi_x \Phi_y} \overline{\Phi_x \Phi_y} \mathcal{N} [\Phi_x, \Phi_y] \right\}$$

$$+ \left\{ +9 \overline{\Phi_x \Phi_x} \overline{\Phi_x \Phi_y} \overline{\Phi_y \Phi_y} + 6 \overline{\Phi_x \Phi_y} \overline{\Phi_x \Phi_y} \overline{\Phi_x \Phi_y} \right\}$$

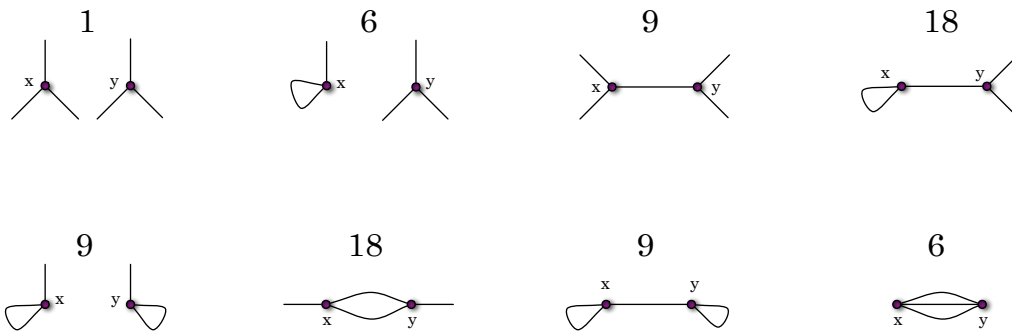


Abbildung 1: Feynman-Diagramme zu  $S^{(2)}$ .

## Aufgabe 16

### Bemerkung 1

Zu Familie  $(a_i^j)_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}_0^N} \prod_{i=1}^N a_i^{j_i} = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j_i=0}^{\infty} a_i^{j_i} \quad (4)$$

falls beide Seiten Sinn ergeben und  $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i^j$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  absolut konvergent ist.

**Beweis:**

$$\prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i^j = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i^j = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_0^N} \prod_{i=1}^N \alpha_i^{j_i}$$

## Bemerkung 2

Betrachtet sei die Dyson-Entwicklung

$$\langle 0 | S^{(n)} | 0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle 0 | S^{(n)} | 0 \rangle$$

Jeder Term  $\langle 0 | S^{(n)} | 0 \rangle$  besteht aus Beiträgen von Graphen mit genau  $n$  Vertices. Nach Darstellung (2) reicht es dabei für die Berechnung von

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^D x_1 \dots d^D x_n \underbrace{\langle 0 | \mathcal{T} [\mathcal{H}_I(x_1), \dots, \mathcal{H}_I(x_n)] | 0 \rangle}_{\langle 0 | S^{(n)} | 0 \rangle}$$

lediglich die Vakuumphagen zu betrachten.

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = \langle 0 | \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots | 0 \rangle$$

**Abbildung 2:** Einschränkung der  $S$ -Matrix-Wirkung auf Vakuumphagen im Falle einer  $0 \rightarrow 0$  Streuung.

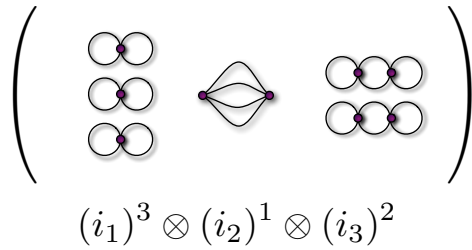
Tatsache ist, dass die Menge aller Vakuumphagen abzählbar ist und jeder Vakuumphage aus einzelnen, zusammenhängenden Vakuumphagen (indiziert durch  $i \in \mathbb{N}$ ) besteht. Ist  $v_i \in \mathbb{N}_0$  die Anzahl der Vertices im  $i$ -ten zusammenhängenden Vakuumphage (o.B.d.A. sei  $v_i \leq v_j$  für  $i \leq j$ ), so sei

$$\mathcal{D}_i := \frac{1}{v_i!} \int d^D x_1 \dots d^D x_{v_i} \langle 0 | \mathcal{T} [\mathcal{H}_I(x_1), \dots, \mathcal{H}_I(x_{v_i})] | 0 \rangle \Big|_i$$

der Beitrag des  $i$ -ten zusammenhängenden Vakuumphagen in der Entwicklung nach Wick (samt Kombinatorik/Integralvertausch - Vorfaktor).

Im Falle zusammengesetzter Vakuumphagen, bestehend aus den (paarweise verschiedenen) zusammenhängenden Vakuumphagen  $(i_1), \dots, (i_m)$  jeweils mit Potenzen  $j_1, \dots, j_m$ , ergibt sich ein Beitrag in der Dyson-Reihe (samt Kombinatorik-Vorfaktor) gemäß

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\underbrace{v_{(i_1)^{j_1}} \otimes \dots \otimes (i_m)^{j_m}}_{(v_{i_1} j_1 + \dots + v_{i_m} j_m)!})!} \int d^D x_1 \dots d^D x_{v_i} \langle 0 | \mathcal{T} [\mathcal{H}_I(x_1), \dots, \mathcal{H}_I(x_{v_i})] | 0 \rangle \Big|_{(i_1)^{j_1} \otimes \dots \otimes (i_m)^{j_m}} \\ &= \frac{1}{(v_{i_1} j_1 + \dots + v_{i_m} j_m)!} \cdot \underbrace{(v_{i_1} j_1 + \dots + v_{i_m} j_m)!}_{\text{Vertauschung der Integrale}} \cdot \prod_{k=1}^m \underbrace{\binom{C_{i_k}}{j_k}}_{\text{Kombinatorik des einzelnen Diagramms } i_k} \cdot \prod_{k=1}^m \underbrace{\left[ \frac{v_{i_k}! \cdot \mathcal{D}_{i_k}}{v_{i_k}! \cdot C_{i_k}} \right]^{j_k}}_{\text{Einzelnes Diagramm } i_k \text{ ohne Kombinatorik \& Integralvertauschungen}} \cdot \prod_{k=1}^m \underbrace{\frac{1}{j_k!}}_{\text{Reihenfolge der identischen Diagramme } i_k \text{ in Wick-Entwicklung egal}} \\ &= \prod_{k=1}^m \frac{1}{j_k!} (\mathcal{D}_{i_k})^{j_k} \end{aligned}$$



**Abbildung 3:** Vakuum-Graph mit 9 Vertices, zusammengesetzt aus 3 Arten zusammenhängender Vakuumdiagramme, jeweils mit Potenzen 3,1 und 2.

### Berechnung der Vakuum-Vakuum-Übergangsamplitude

Nach obigen Überlegungen kann die Übergangswahrscheinlichkeit geschrieben werden als Summe aller möglichen Vakuumgraphen-Beiträge. Dabei ist jeder Vakuum-Graph eindeutig durch die Angabe der Potenzen der einzelnen (gegebenfalls vorkommenden) zusammenhängenden Vakuumdiagramme beschrieben (ein nicht vorkommendes, zusammenhängendes Vakuumdiagramm ( $i$ ) besitzt Potenz 0). Somit:

$$\langle 0|S|0\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle 0|S^{(n)}|0\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_0^N} \underbrace{\prod_{i=1}^N \frac{1}{j_i!} (\mathcal{D}_i)^{j_i}}_{\text{Beitrag des Vakuumgraphs } (1)^{j_1} \otimes \dots \otimes (N)^{j_N}} \stackrel{(4)}{=} \prod_{i=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\mathcal{D}_i)^j}_{\exp(\mathcal{D}_i)} = \exp \left[ \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_i \right]$$

□