

6. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG QUANTENFELDTHEORIE

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 7. Semesterwoche (25./28.05.2009)

Aufgabe 11:

(5 Punkte)

Ladungskonjugation für ein komplexes Skalarfeld kann auch durch einen unitären Operator realisiert werden:

$$U = \exp \left[-i \frac{\pi}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}) \right].$$

- (a) Überprüfen Sie, dass U tatsächlich unitär ist, d.h., $U^\dagger = U^{-1}$.
 (b) Zeigen Sie, dass U die Ladungskonjugation auf den Feldoperatoren implementiert,

$$\phi^\dagger(\mathbf{x}) = U \phi(\mathbf{x}) U^\dagger.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $U a_{\mathbf{p}} U^\dagger = b_{\mathbf{p}}$, wobei Sie eine Variante der BCH Formel verwenden können:

$$e^{-A} B e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\left[\dots \left[[B, A], A \right], \dots, A \right]}_{k\text{-fach}}.$$

Aufgabe 12:

(5 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass der Feynman-Propagator in folgender Form in Teilchen- und Antiteilchenbeiträge zerlegt werden kann,

$$\Delta_{\text{F}}(x) = \theta(x^0) \Delta^+(x) + \theta(-x^0) \Delta^-(x),$$

und dadurch eine zeitgeordnete Struktur erhält.

Definitionen: mit $D = d + 1$ und $\bar{p}^\mu = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ gilt

$$\Delta_{\text{F}}(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p x}, \quad \Delta^\pm(x) = \frac{1}{i} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{\mp i \bar{p} x}.$$

- (b) Die $i\epsilon$ Vorschrift beim Feynman-Propagator regelt, wie die Kontour des p^0 -Integrals die beiden Pole des Integranden bei $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}}$ in der komplexen p^0 -Ebene umfährt.

Betrachten Sie nun alternativ eine Kontour, die beide Pole in der oberen Halbebene umfährt, und zeigen Sie, dass dies auf den *retardierten* Propagator führt,

$$\Delta_{\text{R}}(x) = \theta(x^0) \Delta(x), \quad \text{mit} \quad \Delta(x) = \Delta^+(x) - \Delta^-(x).$$

- (c) Zeigen Sie, dass eine Kontour, die beide Pole in der unteren Halbebene umfährt, auf den *avancierten* Propagator führt,

$$\Delta_{\text{A}}(x) = -\theta(-x^0) \Delta(x).$$