4. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Aufgabe 9 (Präsenzübung für die 4. Semesterwoche): (3 Punkte)

Eine lineare Transformation des Vierer-Vektors

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,$$

die die Norm

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv x^\mu x_\mu, \quad g = (+,-,-,-),$$

erhält, heißt Lorentz-Transformation.

(a) Zeigen Sie, dass Λ folgende Indentität erfüllt:

$$g_{\kappa\lambda} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda.$$

(b) Betrachten Sie infinitesimale Lorentz-Transformationen $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$ mit $\epsilon^\mu{}_\nu \ll 1$. Zeigen Sie, dass

$$\epsilon_{\kappa\lambda} + \epsilon_{\lambda\kappa} = 0$$

gilt, und damit die Lorentz-Transformationen durch 6 unabhängige Parameter bestimmt sind (in 4 Raumzeit-Dimensionen).

(c) Betrachten Sie nun ein skalares Feld $\phi(x)$ und die zugehörige Klein-Gordon–Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$. Verwenden Sie nun die Transformationseigenschaft eines skalaren Feldes, $\phi \to \phi' = \phi(\Lambda x)$, unter Lorentz-Transformationen, um den zugehörigen Noether-Strom J^μ der Klein-Gordon-Theorie abzuleiten; zeigen Sie, dass dieser geschrieben werden kann als:

$$J^\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\kappa\lambda} \mathcal{J}^{\mu\kappa\lambda}, \quad J^{\mu\kappa\lambda} = T^{\mu\kappa} x^\nu - T^{\mu\nu} x^\kappa,$$

wobei $T^{\mu\nu}$ der kanonische Energie-Impuls-Tensor des Klein-Gordon-Feldes ist.

(d) Verwenden Sie den in der Vorlesung eingeführten Feld-Impuls $\mathbf{P}$, um zu zeigen, dass

$$L^k := -\frac{1}{2} \epsilon^{kij} \int d^d x J^{0ij}$$

als Feld-Drehimpuls interpretiert werden kann, weil $\mathbf{L}$ den Zusammenhang $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{P}$ erfüllt.

Übungsaufgabe für die 5. Semesterwoche: Aufgabe 8 vom 3. Übungsblatt (Quantisierung des freien komplexen Klein-Gordon-Feldes.)