3. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 4. Semesterwoche (04.05.2009)

Aufgabe 7: (3 Punkte)

Betrachten Sie eine klassische Feldtheorie welche invariant unter Translationen $x_\mu \to x_\mu - a_\mu$ ist. Die zugehörige Noether-Ladung ist gegeben durch den 4er-Impuls des Feldes,

$$P^\mu = \int d^3x (\pi \partial^\mu \phi - g^{\mu 0} \mathcal{L}).$$

Zeigen Sie, dass die Noether-Ladung zugleich der Generator der Raumzeit-Translationen ist, d.h., dass gilt

$$\delta\phi = -a_\mu \{\phi(\mathbf{x}), P^\mu\}.$$

Aufgabe 8: (7 Punkte)

Quantisieren Sie das komplexe freie Skalarfeld.

Hinweise:

(a) Betrachten Sie zunächst die Lagrange-Dichte für das klassische komplexe Skalarfeld,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 |\phi|^2,$$

und konstruieren Sie daraus die Hamilton-Dichte: $\mathcal{H} = \pi^* \pi + \nabla\phi^* \cdot \nabla\phi + m^2|\phi|^2$, in welcher Sie die kanonischen Variablen durch hermitesche Operatoren ersetzen, d.h., insbesondere $\phi^*, \pi^* \to \phi^\dagger, \pi^\dagger$.

(b) Quantisieren Sie nun die Feldoperatoren, indem Sie die Leiteroperator-Darstellung der reellen Feldkomponenten $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ verwenden. Definieren Sie dafür

$$a(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\mathbf{p}) + i a_2(\mathbf{p})), \quad b(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\mathbf{p}) - i a_2(\mathbf{p})),$$

und zeigen Sie, dass diese komplexen Leiteroperatoren zwei unabhängige Leiteroperator-Algebren erfüllen.

(c) Drücken Sie nun die komplexen Feld- und Impulsdichteoperatoren in geeigneter Weise durch $a, a^\dagger, b$ und $b^\dagger$ aus.

(d) Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator geschrieben werden kann als

$$H = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\, \omega_\mathbf{p} (a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) + b^\dagger(\mathbf{p}) b(\mathbf{p})) + \text{Nullpunkts-Energien}$$

(e) Betrachten Sie die Noether-Ladung $Q = i \int dx (\phi^\dagger \partial^0 \phi - \phi \partial^0 \phi^\dagger)$, und zeigen Sie, dass die Leiteroperatoren $a^\dagger$ und $b^\dagger$ Feldanregungen mit unterschiedlichem Ladungsvorzeichen generieren.