Quantenfeldtheorie

FSU Jena - SS 2009

Serie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

20. April 2010

Notation

Sei M der Phasenraum (Mannigfaltigkeit), $\Phi := \{\phi : M \to \mathbb{R}\}$ der Raum aller skalarer Felder auf M und $\mathcal{F} := \{F : \Phi \to \mathbb{R}\}$.
Annahme 1: Der Operator

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

sei stetig in dem Sinne dass, für $F_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} F$ punktweise, geht auch $\delta_{\phi(x)} F_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta_{\phi(x)} F$ punktweise.
Annahme 2: Der Operator $\delta_{\phi(x)}$ ist linear.

Aussage 1

Für konstantes $F \equiv \text{const}$ ist $\delta_{\phi(x)} F = 0$.
Beweis: Sei zunächst $F \equiv 1$. Dann

$$\delta_{\phi(x)} 1 = \delta_{\phi(x)}(1 \cdot 1) = 1 \cdot \delta_{\phi(x)} 1 + 1 \cdot \delta_{\phi(x)} 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_{\phi(x)} 1 = 0$$

Wegen Linearität folgt dies auch für beliebiges $F \in \mathbb{R}$.

Aussage 2

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Regel

$$\delta_{\phi(x)} F^n = n \cdot F^{n-1} \cdot \delta_{\phi(x)} F \tag{1}$$

wobei $F^n := \underbrace{F \cdot .. \cdot F}_{\times n}$.
Beweis: Aus der Leibniz Regel folgt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\delta_{\phi(x)}(F^n) \stackrel{\text{Leibniz}}{=} F^{n-1} \cdot \delta_{\phi(x)} F + F \cdot \delta_{\phi(x)} F^{n-1}$$

$$= F^{n-1} \cdot \delta_{\phi(x)} F + F \cdot F^{n-2} \cdot \delta_{\phi(x)} F + F^2 \cdot \delta_{\phi(x)} F^{n-2}$$

$$= \cdots = \sum_{k=1}^{n} F^k \cdot F^{n-k-1} \cdot \delta_{\phi(x)} F = n F^{n-1} \delta_{\phi(x)} F$$

Der Fall $n = 0$ ist klar wegen Aussage 1.

Aussage 03

Es sei $(F_z)_{z \in M} \subset \mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen. Dann gilt :

$$\delta_{\phi(x)} \left(\partial_{z^i} F_z\right) = \partial_{z^i} \left(\delta_{\phi(x)} F_z\right) \tag{2}$$

(falls beide Seiten sinnvoll) denn

$$\delta_{\phi(x)} \partial_{z^i} F_z = \delta_{\phi(x)} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[F_{z+he_i} - F_z\right]$$

$$\stackrel{\substack{\text{Stetig} \\ \text{\& linear}}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\delta_{\phi(x)} F_{z+he_i} - \delta_{\phi(x)} F_z\right] = \partial_{z^i} \delta_{\phi(x)} F_z$$

Aussage 4

Sei $\mathcal{L} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ analytisch (lokal) und $F_1, .., F_N \in \mathcal{F}$. Dann gilt die Kettenregel

$$\delta_{\phi(x)}\mathcal{L}(F_1, .., F_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_i} \delta_{\phi(x)} F_i$$

Beweis: O.B.d.A sei $N = 1$. Dann ist

$$\delta_{\phi(x)}(\mathcal{L} \circ F) = \delta_{\phi(x)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n F^n \overset{\substack{\text{stetig}\\\text{linear}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{\delta_{\phi(x)} F^n}_{\substack{nF^{n-1}\delta_{\phi(x)}F\\\text{Aussage 2}}} = \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n n F^{n-1}\right]}_{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F}} \cdot \delta_{\phi(x)} F$$

Sei $(\mathcal{L}_z)_{z \in M} \subset \mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen, so dass gilt

$$\mathcal{L}_z(\phi) = \mathcal{L}(\phi(z), \partial\phi(z)) \quad , \quad \phi \in \Phi$$

das heißt $\mathcal{L}_z(\phi)$ hängt nur von dem Wert und Ableitungen von ϕ am Ort z ab. Ist $\mathcal{L}_z(\phi)$ analytisch in ϕ, so gilt die Kettenregel

$$\delta_{\phi(x)}\mathcal{L}_z(\phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \cdot \delta_{\phi(x)}\phi(z) + \sum_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_{\phi(x)} \partial\phi(z)$$

Beweis: O.b.d.A sei $\mathcal{L}_z(\phi) = \mathcal{L}_z(\phi(z))$.

$$\delta_{\phi(x)}\mathcal{L}_z(\phi) = \delta_{\phi(x)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi^n(z) \overset{\substack{\text{stetig}\\\text{linear}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{\delta_{\phi(x)}\phi^n(z)}_{\substack{n\phi^{n-1}(z)\delta_{\phi(x)}\phi(z)\\\text{Aussage 2}}} = \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n n \phi^{n-1}(z)\right]}_{\frac{\partial \mathcal{L}_z}{\partial \phi}} \cdot \delta_{\phi(x)}\phi(z)$$

Aufgabe 04

Eigenschaft 1

Annahme: Integration und $\delta_{\phi(x)}$ können vertauscht werden.
Dann gilt

$$\delta_{\phi(z)} \int J(x)\phi(x) = \int \delta_{\phi(z)}(J(x)\phi(x)) = \int J(x) \cdot \underbrace{\delta_{\phi(z)}\phi(x)}_{\delta(x-z)} = J(z)$$

Eigenschaft 2

Schreiben:

$$\delta_{\phi(x)} \exp{(J)} = \delta_{\phi(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k}{k!} \overset{\text{Stetig}}{=} \lim_{k\to\infty} \delta_{\phi(x)} \sum_{l=0}^{k} \frac{J^l}{l!} \overset{\text{Linear}}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} \delta_{\phi(x)} \frac{J^l}{l!}$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} J^{k-1} \cdot \delta_{\phi(x)} J = \underbrace{\delta_{\phi(x)} J}_{J(x)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k}{k!} = J(x) \cdot \exp(J)$$

Aufgabe 05

Schreiben

$$0 = \delta_{\phi(x)} S[\phi] = \int d^n z \; \delta_{\phi(x)} \mathcal{L}(\phi(z), \partial\phi(z), z) \overset{\text{Aussage 4}}{=} \int d^n z \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \underbrace{\frac{\delta\phi(z)}{\delta\phi(x)}}_{\delta(z-x)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{z^\mu}\phi} \underbrace{\frac{\delta \partial_{z^\mu}\phi(z)}{\delta\phi(x)}}_{\substack{\partial_{z^\mu}\delta_{\phi(x)}\phi(z)\\\text{Aussage 3}}}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}(\phi(x), \partial\phi(x), x) + \int d^n z \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{z^\mu}\phi)} \cdot \partial_{z^\mu}\delta(z-x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}(\phi(x), \partial\phi(x), x) - \partial_{x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{x^\mu}\phi)}(\phi(x), \partial\phi(x), x)$$

Aufgabe 06

Poissonklammern der ϕ, π

Schreiben

$$\{\phi(x), \phi(y)\} = \int d^n z \left[\underbrace{\delta_{\phi(z)}\phi(x)}_{\delta(x-z)} \cdot \delta_{\pi(z)}\phi(y) - \delta_{\pi(z)}\phi(x) \cdot \underbrace{\delta_{\phi(z)}\phi(y)}_{\delta(y-z)} \right] = \delta_{\pi(x)}\phi(y) - \delta_{\pi(y)}\phi(x) = \delta(y-x) - \delta(x-y) = 0$$

$$\{\pi(x), \pi(y)\} \overset{\text{Analog}}{=} 0$$

$$\{\phi(x), \pi(y)\} = \int d^n z \left[\underbrace{\delta_{\phi(z)}\phi(x)}_{\delta(x-z)} \cdot \delta_{\pi(z)}\pi(y) - \delta_{\pi(z)}\phi(x) \cdot \underbrace{\delta_{\phi(z)}\pi(y)}_{0} \right] = \delta_{\pi(x)}\pi(y) = \delta(y-x)$$

Bewegungsgleichung für Klein-Gordon-Theorie

Für Feld $H(\phi, \pi)$ gilt

$$\{\phi(x), H\} = \int d^n z \left[\delta_{\pi(z)}H \cdot \underbrace{\delta_{\phi(z)}\phi(x)}_{\delta(x-z)} - \delta_{\phi(z)}H \cdot \underbrace{\delta_{\pi(z)}\phi(x)}_{0} \right] = \delta_{\pi(x)}H$$

$$\{\pi(x), H\} \overset{\text{Analog}}{=} -\delta_{\phi(x)}H$$

Folglich

$$\dot{\phi}(x) = \delta_{\pi(x)}H = \int d^n z \, \frac{1}{2} \left[\underbrace{\delta_{\pi(x)}\pi^2(z)}_{\substack{2\pi(z)\delta_{\pi(x)}\pi(z) \\ \text{Aussage 2}}} + \delta_{\pi(x)} \left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_i \phi)^2(z) \right) + m^2 \underbrace{\delta_{\pi(x)}\phi^2(z)}_{\substack{2\phi(z)\delta_{\pi(x)}\phi(z)=0 \\ \text{Aussage 2}}} \right]$$

$$= \int d^n z \left[\pi(z)\delta(z-x) + \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \phi(z)) \cdot \underbrace{\delta_{\pi(x)}(\partial_i \phi(z))}_{\substack{0 \\ \text{Aussage 3}}} \right] = \pi(x)$$

$$\dot{\pi}(x) = -\delta_{\phi(x)}H = -\int d^n z \, \frac{1}{2} \left[2\pi(z) \cdot \underbrace{\delta_{\phi(x)}\pi(z)}_{0} + \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \phi(z)) \cdot \underbrace{\delta_{\phi(x)}(\partial_i \phi(z))}_{\substack{\partial_{z^i} \delta_{\phi(x)}\phi(z) \\ \text{Aussage 3}}} + 2m^2 \phi(z) \underbrace{\delta_{\phi(x)}\phi(z)}_{\delta(z-x)} \right]$$

$$= -m^2 \phi(x) - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int d^n z \, (\partial_i \phi(z)) \cdot \partial_{z^i} \delta(z-x)}_{-\partial_i(\partial_i \phi(x))} = -m^2 \phi(x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 \phi(x)$$