

2. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG QUANTENFELDTHEORIE

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 3. Semesterwoche (27.04.2008)

Aufgabe 4:

(3 Punkte)

Funktionale Differentiation $\delta/\delta\phi(x)$ kann definiert werden durch die Bedingung, dass die gewöhnlichen algebraischen Regeln für Ableitungen gelten,

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\phi(x)}(F_1[\phi] + F_2[\phi]) &= \frac{\delta}{\delta\phi(x)}F_1[\phi] + \frac{\delta}{\delta\phi(x)}F_2[\phi], \quad (\text{Linearität}) \\ \frac{\delta}{\delta\phi(x)}(F_1[\phi]F_2[\phi]) &= F_1[\phi]\frac{\delta}{\delta\phi(x)}F_2[\phi] + F_2[\phi]\frac{\delta}{\delta\phi(x)}F_1[\phi], \quad (\text{Leipniz Regel})\end{aligned} \quad (1)$$

wobei $F_i[\phi]$ Funktionale von ϕ sind, und dass zusätzlich gilt:

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\phi(x) = \delta^{(D)}(x - y). \quad (2)$$

Verifizieren Sie, dass

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\phi(y)} \int_x \phi(x)J(x) &= J(y), \\ \frac{\delta}{\delta\phi(y)} \exp\left(\int_x \phi(x)J(x)\right) &= J(y) \exp\left(\int_x \phi(x)J(x)\right),\end{aligned} \quad (3)$$

wobei $\int_x \equiv \int d^Dx$.

Aufgabe 5:

(2 Punkte)

Gegeben sei die klassische Wirkung S für ein Feld $\phi(x)$ in der Raumzeit. Mit Hilfe der Funktionalableitung lässt sich das Hamiltonsche Prinzip wie folgt formulieren:

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} = 0.$$

Zeigen Sie, dass daraus für Wirkungen von Typ $S[\phi] = \int d^Dy \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi; y)$ die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen.

Aufgabe 6:

(5 Punkte)

Für ein klassisches Feld $\phi(\mathbf{x}, t)$ mit zugehöriger kanonisch konjugierter Impulsdichte $\pi(\mathbf{x}, t)$ kann analog zur klassischen Mechanik eine Poisson-Klammer definiert werden. Seien $A[\phi, \pi]$ und $B[\phi, \pi]$ zwei allgemeine Phasenraumfunktionale, dann ist die Poisson-Klammer in $d = D - 1$ räumlichen Dimensionen gegeben durch (das Zeitargument t sei im folgenden der Einfachheit halber weggelassen)

$$\{A, B\} := \int d^d z \left(\frac{\delta A}{\delta \phi(\mathbf{z})} \frac{\delta B}{\delta \pi(\mathbf{z})} - \frac{\delta A}{\delta \pi(\mathbf{z})} \frac{\delta B}{\delta \phi(\mathbf{z})} \right).$$

(a) Verifizieren Sie die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\{\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})\} = 0, \quad \{\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} = 0, \quad \{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} = \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Die Zeitevolution von Feld und Impulsdichte werden generiert durch die Hamilton-Funktion H vermöge der kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}) = \{\phi(\mathbf{x}), H\}, \quad \dot{\pi}(\mathbf{x}) = \{\pi(\mathbf{x}), H\}.$$

(b) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen für die Klein-Gordon-Theorie mit der Hamilton-Funktion

$$H \equiv \int d^d y \mathcal{H}(\mathbf{y}) = \int d^d y \frac{1}{2} \left(\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right)$$

wobei $\mathcal{H}(\mathbf{y})$ die Hamilton-Dichte ist.