Quantenfeldtheorie

FSU Jena - SS 2009

Serie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

27. April 2009

Aufgabe 01

Die Länge l_n in natürlichen Koordinaten ist gegeben durch

$$l_n = \frac{l}{c\hbar}$$

mit l die *tatsächliche* Länge. Eine Körpergröße von $l = 1.8$ m entsprich somit

$$l_n = 9.12 \times 10^6 \ \frac{1}{\mathrm{eV}}$$

Aufgabe 02

Der Druck p besitzt die Einheit

$$[p] = \frac{[c\hbar]}{[a]^4}$$

Unter Annahme eines monomen Zusammenhangs $p \propto a^{q_1} c^{q_2} \hbar^{q_3}, \ q_i \in \mathbb{Z}$ ergibt sich eine Abhängigkeit

$$p \propto \frac{1}{a^4}$$

Aufgabe 03

Vorbetrachtung 1

Für 2-mal differenzierbare $f \in L_2$ mit $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = \lim\limits_{\|x\| \to \infty} f'(x) = 0$ gilt:

$$\mathcal{F}(\partial_\mu f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int (\partial_\mu f(x)) e^{-ikx} \ d^D x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \underbrace{\int \partial_\mu \left(f(x) e^{-ikx} \right) \ d^D x}_{0} - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) \partial_\mu \left(e^{-ikx} \right) \ d^D x$$

$$= \frac{ik_\mu}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) e^{-ikx} \ d^D x = ik_\mu \cdot \mathcal{F}(f)(k)$$

und ferner

$$\mathcal{F}(\partial^2 f)(k) = -k_\mu k_\mu \cdot \mathcal{F}(f)(k) = -\|k\|^2 \mathcal{F}(f)(k)$$

wobei $\mathcal{F} : L_2 \to L_2$ die Fourier-Transformation sei.

Vorbetrachtung 2

Die Fourier-Transformierte einer Gauss-Funktion ist auch wieder Gauss:

$$f(x) = e^{-\alpha \|x\|^2} \ \Rightarrow \ \mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{D}{2}}} \cdot e^{-\frac{\|k\|^2}{4\alpha}}$$

Bestimmung von $\tilde{G}$

Beginnend mit der *Definition* des Integralkerns G im $\mathbb{R}^n$:

$$\underbrace{(-\partial^2 + m^2)}_{\mathcal{D}} G(x) = \delta(x)$$

schreiben wir für die Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}G) = \mathcal{F}(-\partial^2 G) + m^2 \mathcal{F}(G) \overset{1.}{=} (\|k\|^2 + m^2) \cdot \mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(\delta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}$$

$$\Rightarrow \;\mathcal{F}(G)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \cdot \frac{1}{\|k\|^2 + m^2}$$

Somit

$$G(x) = (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}G)(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int \frac{e^{ikx}}{\|k\|^2 + m^2} d^D k = \frac{1}{(2\pi)^D} \int\limits_0^\infty e^{-m^2 T} dT \int e^{-\|k\|^2 T} e^{ikx} \; d^D k$$

$$\overset{2.}{=} \frac{1}{(2\pi)^D} \int\limits_0^\infty \frac{1}{(2T)^{\frac{D}{2}}} \cdot e^{-m^2 T} e^{-\frac{\|x\|^2}{4T}} \; dT \overset{\substack{\text{sub:}\\ u:=m^2 T}}{=} \frac{1}{m^2} \cdot \left(\frac{m}{2\sqrt{2}\pi}\right)^D \int\limits_0^\infty u^{-\frac{D}{2}} e^{-u - \frac{\|mx\|^2}{4u}} du$$

$$= \frac{\|x\|}{m(2\pi)^D} \cdot \left(\frac{m}{\|x\|}\right)^{\frac{D}{2}} \cdot K_{1-\frac{D}{2}}(m\,\|x\|) = \frac{1}{(2\pi)^D} \cdot \left(\frac{m}{\|x\|}\right)^{\frac{D}{2}-1} \cdot K_{\frac{D}{2}-1}(m\,\|x\|)$$

Grenzfälle

Für $m \approx 0$ ist

$$G(x) \overset{m\approx 0}{\approx} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right)}{4(\sqrt{2}\pi)^D} \cdot \frac{1}{\|x\|^{D-2}}$$

Für $\|x\| \gg \frac{1}{m}$ ist

$$G(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2m\,\|x\|}} \cdot e^{-m\|x\|} \cdot \left(\frac{m}{\|x\|}\right)^{\frac{D}{2}-1}$$