13. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 14. Semesterwoche (15.07.2008)

Aufgabe 30: (3 Punkte)

(a) Betrachten Sie eine Grassmann-Algebra mit N Grassmann-Zahlen

$$\theta_i^2 = 0, \quad \{\theta_i, \theta_j\} = 0. \tag{1}$$

Die Ableitung als linearer Operator sei definiert durch

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}\theta_j = \delta_{ij}. \tag{2}$$

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \theta_j\right\} = 0 \text{ für } i \neq j, \quad \left\{\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j}\right\} = 0. \tag{3}$$

(b) Betrachten Sie nun der Einfachheit halber den Fall $N = 1$. Für die Integration von Grassmann-Zahlen verlangen wir in Analogie zur gewöhnlichen Integration über ein totales Differential mit verschwindenden Randtermen, dass

$$\int d\theta \, \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) = 0. \tag{4}$$

Außerdem soll ein Integral über eine Grassmann-Variable nicht mehr von dieser Variable abhängen,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int d\theta \, f(\theta) = 0. \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass dies (bis auf eine Normierung des Maßes) auf folgende Eigenschaften der Integration führt:

$$\int d\theta \, 1 = 0, \quad \int d\theta \, \theta = 1. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass also Grassmann-Integration und -Ableitung identische Operationen sind.

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass das “Gaußsche” Integral über zwei Grassmann-Zahlen θ und $\bar{\theta}$ gegeben ist durch

$$\int d\theta d\bar{\theta} \, e^{\pm a \bar{\theta}\theta} = \pm a, \tag{7}$$

wobei a ein reeller oder komplexer Parameter sein kann. Vergleichen Sie dies mit einem gewöhnlichen Gaußschen Integral.

(d) Verallgemeinern Sie dies auf zwei Paare von Grassmann-Zahlen θ_i und $\bar{\theta}_i$, $i = 1, 2$ und zeigen Sie, dass

$$\int d\theta d\bar{\theta} \, e^{\bar{\theta}_i A_{ij} \theta_j} = -\det A. \tag{8}$$

Aufgabe 31: (2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für eine $N \times N$ matrix A die wichtige Identität

$$\ln \det A = \mathrm{tr}\, \ln A$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Spur einer Funktion des Laplace-Operators im Raumzeitkontinuum als einfaches Integral im Fourier-Raum geschrieben werden kann:

$$\mathrm{Tr}\ f(-\partial^2) = V_D \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, f(p^2), \tag{9}$$

wobei V_D das D-dimensionale Raumzeitvolumen bezeichnet.

Hinweis: Benutzen Sie zunächst die Ortsraumdarstellung der Spur, $\mathrm{Tr}\,[\ldots] = \int d^D x\, \langle x| \ldots |x\rangle$, und führen Sie dann einen Impulsraumzwischenzustand ein. Normierung der Orts-Impulsamplitude: $\langle x|p\rangle = \exp(ixp)/(2\pi)^{D/2}$.

Aufgabe 32: (5 Punkte)

Betrachten Sie das Funktionalintegral der Theorie eines reellen skalaren Feldes mit Wirkung

$$S = \int d^D x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right).$$

(a) Setzen Sie $\phi = \phi_0 + \varphi$, wobei ϕ_0 die klassische Bewegungsgleichung $\delta S[\phi = \phi_0]/\delta\phi = J$ erfüllt, und entwickeln Sie die Wirkung bis zur zweiten Ordnung in φ, so dass das Funktionalintegral

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\, e^{iS - i\int J\phi}$$

von Gaußscher Form (bzw. Fresnel-Form) wird. Überzeugen Sie sich davon, dass das Integral mit Hilfe von Aufgabe 29 ausgeführt werden kann und in dieser Nährerung auf die Form

$$T[J, \phi_0] = \frac{Z[J, \phi_0]}{Z[0,0]} = e^{iS[\phi_0] - i\int J\phi_0}\ \frac{\det^{-\frac{1}{2}}(-\partial^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\phi_0^2)}{\det^{-\frac{1}{2}}(-\partial^2 - m^2)}$$

führt.

(b) Zeigen Sie, dass

$$W[\phi_0] = -i \ln T[J = 0, \phi_0]$$

alle 1-Teilchen-reduziblen (1PI) Diagramme bis zur ein-Schleifen-Ordnung (1-loop) generiert. Hinweis: verwenden Sie Aufgabe 31 und entwickeln Sie die Determinante (bzw. Spur) nach ϕ_0.