12. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 13. Semesterwoche (24.06.2008)

Aufgabe 28: (4 Punkte)

In der Vorlesung fanden wir vier unabhängige Lösungen der freien Dirac-Theorie der Form $\psi(x) = u(p)e^{-ipx}$ bzw. $\psi(x) = v(p)e^{ipx}$ mit

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \end{pmatrix}, \quad v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2,$$

wobei ξ^s bzw. η^s jeweils eine Basis für 2er-Spinoren bilden.
Zeigen Sie, dass für orthonormierte Spinbasen,

$$\sum_{s=1,2} \xi^s \xi^{s\dagger} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

folgende Spinsummen gelten:

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \gamma\cdot p + m, \quad \sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \gamma\cdot p - m.$$

Aufgabe 29: (6 Punkte)

Betrachten Sie eine “diskretisierte freie Quantenfeldtheorie” mit diskreten Feldvariablen ϕ_i (der Index $i = 1\dots n$ repräsentiere formal weitere Indizes wie z.B. Lorentz- oder innere Symmetrie-Indizes oder auch Raumzeit- oder Impulsvariablen). Zeigen Sie, dass das erzeugende Funktional $Z[J]$ in geschlossener Form berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \prod_i d\phi_i \,\exp\left(-\frac{1}{2}\phi_i\, M^i{}_j\, \phi^j + J_i\phi^i\right) \\ &= (2\pi)^{n/2}(\det\mathbf{M})^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} J_i\,(\mathbf{M}^{-1})^i{}_j\, J^j\right), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $(\mathbf{M})^i{}_j = M^i{}_j$ eine symmetrische Matrix ist. (Beachten Sie: hier und im Folgenden wird Einsteins Summenkonvention mit einer impliziten Summation über ein Paar von oberen und unteren Indizes verwendet.)

Hinweis:

Verwenden Sie das Gaußsche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp\left(-\frac{1}{2} a \, x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tag{2}$$

sowie eine formale Diagonalisierung der Matrix $\mathbf{M}$ mit Eigenwerten λ_I und normierten Eigenvektoren v_I^i, wobei $I = 1 \ldots n$ die verschiedenen Eigenwerte und -vektoren nummeriert, um zu zeigen, dass

$$\int \prod_i d\phi_i \, \exp\left(-\frac{1}{2} \phi_i \, M^i{}_j \, \phi^j\right) = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{M})^{-1/2}. \tag{3}$$

Betrachten Sie dann das volle Erzeugende Funktional und ergänzen Sie quadratisch.