11. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 12. Semesterwoche (31.06.2008)

Aufgabe 25: (3 Punkte)

(a) Verwenden Sie die fundamentale Eigenschaft der Dirac-Algebra,

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu},$$

um darstellungsunabhängig zu zeigen, dass $\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ mit allen γ^μ antivertauscht, d.h. $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$.

(b) Zeigen Sie auf diese Weise ebenso darstellungsunabhängig, dass $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$.

(c) Verifizieren Sie damit, dass die rechts- und linkshändigen Projektoren

$$P_\mathrm{R} := \frac{1}{2}(1+\gamma_5), \quad P_\mathrm{L} := \frac{1}{2}(1-\gamma_5),$$

die Projektor-Algebra

$$P_\mathrm{R,L}^2 = P_\mathrm{R,L}, \quad P_\mathrm{R} P_\mathrm{L} = 0, \quad P_\mathrm{R} + P_\mathrm{L} = 1$$

erfüllen.

(d) Zeigen Sie damit, dass der kinetische Term der Dirac-Theorie in separate kinetische Terme für ψ_L und ψ_R zerlegt werden kann, wobei $\psi_\mathrm{R,L} = P_\mathrm{R,L}\psi$. Zeigen Sie außerdem, dass dies für den Massenterm nicht gilt.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\bar\psi_\mathrm{L,R} = \bar\psi P_\mathrm{R,L}$ (warum?).

Aufgabe 26: (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Theorie mit Wirkung

$$S = \int d^4x \left(\bar\psi i\partial_\mu\gamma^\mu\psi - \frac{\lambda}{2}\left[(\bar\psi\psi)^2 - (\bar\psi\gamma_5\psi)^2\right]\right)$$

invariant ist sowohl unter Vektortransformationen $\mathrm{U}(1)_\mathrm{V}$ als auch unter axialen Transformationen $\mathrm{U}(1)_\mathrm{V}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(1)_\mathrm{V}: &\quad \psi \to e^{i\alpha}\psi, \quad \bar\psi \to e^{-i\alpha}\bar\psi, \\ \mathrm{U}(1)_\mathrm{A}: &\quad \psi \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi, \quad \bar\psi \to e^{i\alpha\gamma_5}\bar\psi, \end{aligned}$$

(Hinweis: Es genügt, infinitesimale Transformationen zu betrachten), und berechnen Sie die zugeörigen Noether-Ströme.

Aufgabe 27: (4 Punkte)

(a) Betrachten Sie eine Grassmann-Algebra bestehend aus lediglich zwei Grassmann-Zahlen θ_1 und θ_2 mit der Eigenschaft

$$\theta_1^2 = 0, \quad \theta_2^2 = 0, \quad \{\theta_1, \theta_2\} = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Kombinationen

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$$

eine Darstellung dieser Grassmann-Algebra z.B. mit $\theta_1 \to \sigma_-$ und $\theta_2 \to \sigma_+$ sind.

(b) Überzeugen Sie sich, dass – unabhängig von der Darstellung – gilt:

$$\exp(\theta_1\theta_2) = \frac{1}{1-\theta_1\theta_2} = 1 + \ln(1+\theta_1\theta_2).$$

(c) Wie lautet die Lösungsmenge x der Gleichung

$$x^2 = 1 + \theta_1\theta_2.$$

(d)* Gegeben eine Grassmann-Algebra mit n Grassmann-Zahlen

$$\theta_i^2 = 0, \quad \{\theta_i, \theta_j\} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Wieviele linear unabhängige Elemente hat die Algebra?

---

* Zusatzaufgabe für Gewillte