9. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 10. Semesterwoche (17.06.2008)

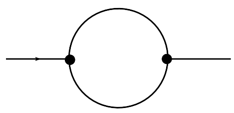
Aufgabe 21: (10 Punkte)

Betrachten Sie die ϕ^3-Theorie mit Langrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3.$$

in D-dimensionaler Raumzeit und studieren Sie den 2-Punkt-Korrelator $G^{(2)} \equiv G$.

(a) Berechnen Sie den 2-Punkt-Korrelator $G(p^2)$ zur Ordnung g^2 im Impulsraum. Hinweis: Sei $G(p^2) = G^{[0]}(p^2) + G^{[2]}(p^2) + \ldots$ die störungstheoretische Entwicklung von G mit $G^{[0]}(p^2) = i\Delta_{\mathrm{F}}(p^2)$ und $G^{[2]}(p^2)$ der zu berechnenden nicht-trivialen 1-*loop*-Korrektur von der Ordnung g^2. Diese Korrektur zum freien Propagator entspricht dem folgenden Diagramm (vgl. Aufgabe (19)):



(NB: ein zweites sog. *tadpole* Diagramm, das Sie ebenfalls in Aufgabe (19) gefunden haben, liefert nur einen uninteressanten impulsunabhängigen Beitrag und soll im Folgenden unbeachtet bleiben).

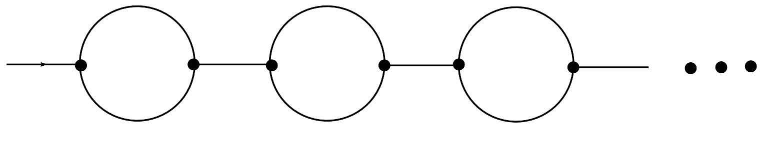
Schreiben Sie diese 1-*loop*-Korrektur als

$$G^{[2]}(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}\big(- i\Sigma(p^2)\big)\frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon},$$

mit zu bestimmendem $\Sigma(p^2)$. Weitere technische Hinweise zu dieser Rechnung finden Sie unten.

(b) Zeigen Sie, dass G bzw. Σ für $p^2 > 4m_0^2$ einen Verzweigungsschnitt entwickelt (welcher somit den Streuzuständen mit "Ruheenergie" $> 2m_0$ entspricht).

(c) Um den 1-Teilchen-Pol zu studieren, ist eine Resummation einer Klasse von Korrekturen höherer Ordnung erforderlich. Betrachten Sie dazu die Summe aller Beiträge zu G, welche aus Ketten von Diagrammen von Typ $G^{[2]}$ bestehen:



Zeigen Sie, dass eine Resummation dieser Diagramme auf folgende Form des 2-Punkt-Korrelators führt:

$$G(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)}.$$

(d) Überzeugen Sie sich davon, dass die physikalische Masse m des 1-Teilchen-Zustands nicht mehr durch m_0 gegeben ist, sondern durch die Wechselwirkung eine Korrektur erfährt, die durch die i.A. transzendente Gleichung

$$m^2 = m_0^2 + \Sigma(m^2)$$

bestimmt wird. Überzeugen Sie sich zudem, dass die Wellenfunktionsrenormierung Z gegeben ist durch

$$Z = \frac{1}{1 - \frac{\partial \Sigma(p^2 = m^2)}{\partial p^2}}.$$

(e) Betrachten Sie nun eine $D = 3$-dimensionale Raumzeit und bestimmen Sie m^2 und Z im Limes $g^2/m_0^3 \ll 1$.

(f) Was passiert im Limes $D \to 4$? Setzen Sie dazu $D = 4 - \epsilon$ und isolieren Sie mögliche Divergenzen durch Entwicklung des Resultats um $\epsilon = 0$ herum.

Weitere technische Hinweise zur Rechnung:
Die technische Schwierigkeit besteht darin, ein D-dimensionales Impulsraumintegral über das Produkt zweier Feynman-Propagatoren auszuwerten, $\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \Delta_{\mathrm{F}}(q) \Delta_{\mathrm{F}}(p - q)$. Führen Sie für diese Propagatoren jeweils eine sog. *Eigenzeit*-Darstellung ein,

$$\frac{1}{A + i\epsilon} = -i \int_0^\infty ds_1 \, e^{i(A+i\epsilon)s_1},$$

z.B. mit $A = q^2 - m^2$. Dadurch wird das q-Integral zu einem Fresnel-Integral (Gauß-Integral mit rein imaginärem Argument im Exponenten). Führen Sie zur Berechnung des Fresnel-Integrals eine Rotation der Zeitrichtung in die Euklidsche Raumzeit durch, $q^0 \to i q_{\mathrm{E}}^0$, so dass $q^2 = q_\mu q^\mu \to -q_{\mathrm{E}}^2 = -q_{\mathrm{E}}^\mu q_{\mathrm{E}}^\mu$.
Für die verbleibenden *Eigenzeit*-Integrale mit Integrationsvariable s_1 und s_2 ist folgende Substitution nützlich:

$$s := s_1 + s_2, \quad v := \frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 \cdots = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds\, s \int_{-1}^1 dv \ldots$$

(Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit dieser Variablentransformation!).
Das s-Integral kann nun analytisch ausgeführt werden. Z.B. unter der Annahme, dass $p^2 < 4m_0^2$, kann die Kontour in der komplexen s-Ebene so rotiert werden, dass $s \to -is$. Das resultierende Integral entspricht der Euler-Darstellung der Γ-Funktion.
Das übrigbleibende v-Integral brauchen Sie im Allgemeinen nicht auszuführen, bzw. können es bei Teilaufgabe (e) in einem einfachen Spezialfall analytisch berechnen.

Lösung Teilaufgabe (a):

$$\Sigma(p^2) = -\frac{g^2}{(3!)^2} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(2 - (D/2)) \int_0^1 dv \left(m_0^2 - \frac{(1 - v^2)}{4} p^2 \right)^{\frac{D}{2} - 2}$$