5. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 6. Semesterwoche (20.05.2008)

Aufgabe 11: (5 Punkte)

Ladungskonjugation für ein komplexes Skalarfeld kann auch durch einen unitären Operator realisiert werden:

$$U = \exp\left[-i\frac{\pi}{2}\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\left(a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + b^\dagger_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}} - a^\dagger_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}} - b^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}\right)\right].$$

(a) Überprüfen Sie, dass U tatsächlich unitär ist, d.h., $U^\dagger = U^{-1}$.

(b) Zeigen Sie, dass U die Ladungskonjugation auf den Feldoperatoren implementiert,

$$\phi^\dagger(\mathbf{x}) = U\phi(\mathbf{x})U^\dagger.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $Ua_{\mathbf{p}}U^\dagger = b_{\mathbf{p}}$, wobei Sie eine Variante der BCH Formel verwenden können:

$$e^{-A}Be^{A} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{\left[\ldots\left[[B,A],A\right],\ldots,A\right]}_{k\text{-fach}}.$$

Aufgabe 12: (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der Feynman-Propagator in folgender Form in Teilchen- und Antiteilchenbeiträge zerlegt werden kann,

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x) = \theta(x^0)\Delta^+(x) + \theta(-x^0)\Delta^-(x),$$

und dadurch eine zeitgeordnete Struktur erhält.

Definitionen: mit $D = d+1$ und $\bar{p}^\mu = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ gilt

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x) = \int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\,e^{-ipx}, \quad \Delta^\pm(x) = \frac{1}{i}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,e^{\mp i\bar{p}x}.$$

(b) Die $i\epsilon$ Vorschrift beim Feynman-Propagator regelt, wie die Kontour des p^0-Integrals die beiden Pole des Integranden bei $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}}$ in der komplexen p^0-Ebene umfährt.

Betrachten Sie nun alternativ eine Kontour, die beide Pole in der oberen Halbebene umfährt, und zeigen Sie, dass dies auf den *retardierten* Propagator führt,

$$\Delta_{\mathrm{R}}(x) = \theta(x^0)\Delta(x), \qquad \text{mit} \quad \Delta(x) = \Delta^+(x) - \Delta^-(x).$$

(c) Zeigen Sie, dass eine Kontour, die beide Pole in der unteren Halbebene umfährt, auf den *avancierten* Propagator führt,

$$\Delta_{\mathrm{A}}(x) = -\theta(-x^0)\Delta(x).$$