4. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 5. Semesterwoche (13.05.2008)

Aufgabe 9: (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung gewählte Normierung der 1-Teilchen-Impulszustände,

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\, a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$$

zu einem Lorentz-invarianten Skalarprodukt führt, d.h.,

$$\langle\mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle = \langle\mathbf{q}'|\mathbf{p}'\rangle,$$

wobei $\mathbf{q}', \mathbf{p}'$ die Impulskoordinaten bezüglich eines Lorentz-transformierten Systems bezeichnen.

Hinweis: es genügt, die Invarianz bezüglich eines Lorentz-*Boosts* entlang z.B. der z-Richtung zu betrachten, so dass $p'^3 = \gamma(p^3 - \beta E_{\mathbf{p}})$ und $E'_{\mathbf{p}} = \gamma(E_{\mathbf{p}} - \beta p^3)$.

Aufgabe 10: (7 Punkte)

Analog zur Ortsdarstellung in der Quantenmechanik, in der der Impulsoperator als $\mathbf{p} \to -i\nabla$ dargestellt werden kann und auf Ortsraumwellenfunktionen $\psi(\mathbf{x}) \equiv \langle\mathbf{x}|\psi\rangle$ wirkt, kann man eine Darstellung der Feldoperatoralgebra in der QFT wählen, in der der kanonische Impuls π durch eine Funktionalableitung nach dem Feld ϕ gegeben ist und auf Wellenfunktionale $\Psi[\phi] \equiv \langle\phi|\Psi\rangle$ wirkt,

$$\pi(\mathbf{x}) \to -i\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})}, \quad [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] \to -i[\phi(\mathbf{x}), \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{y})}] = i\,\delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{1}$$

Bestimmen Sie in dieser Darstellung das Grundzustandswellenfunktional der freien Klein-Gordon-Theorie.

Hinweise:

(a) Bestimmen Sie zunächst die Darstellung von $\pi(\mathbf{p})$ als Ableitung nach $\phi(\mathbf{p})$ im Impulsraum. Diese können Sie z.B. analog zu Eq. (1) aus dem Kommutator $[\phi(\mathbf{p}), \pi(\mathbf{p}')]$ erhalten, den Sie mit Hilfe der Leiteroperatordarstellung berechnen können.

(b) Drücken Sie die Leiteroperatoren $a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p})$ durch die Feldoperatoren $\phi(\mathbf{p})$ und $\pi(\mathbf{p})$ aus.

(c) Schreiben Sie die Definitionsgleichung des Vakuums, $a(\mathbf{p})|0\rangle = 0$, nun mit der Darstellung aus (b) und der Ableitungsdarstellung von π aus (a) in eine Funktionaldifferentialgleichung um,

$$0 = \langle\phi|a(\mathbf{p})|0\rangle = \mathcal{D}[\phi, \tfrac{\delta}{\delta\phi}]\, \Psi_0[\phi],$$

wobei $\mathcal{D}$ der resultierende Differentialoperator ist, und $\Psi_0[\phi] = \langle\phi|0\rangle$ das gesuchte Grundzustandswellenfunktional als Projektion des Vakuums auf die Feldbasis darstellt.

(d) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung mit dem Ansatz

$$\Psi_0[\phi] = \mathcal{N}\, \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^dp' d^dp''\phi(\mathbf{p}')K(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')\phi(\mathbf{p}'')\right)$$

gelöst werden kann und bestimmen Sie den Integralkern $K(\mathbf{p}', \mathbf{p}'')$. (Hierbei ist $\mathcal{N}$ eine Normierungskonstante, die Sie nicht zu bestimmen brauchen.)

Das Quadrat des resultierenden Grundzustandswellenfunktionals $\Psi_0[\phi]$ kann man als Maß für die Wahrscheinlichkeit interpretieren, die Feldkonfiguration $\phi(\mathbf{x})$ im Vakuum zu finden.