2. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Besprechung der Lösungen: in den Übungen der 3. Semesterwoche (29.04.2008)

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Funktionale Differentiation $\delta/\delta\phi(x)$ kann definiert werden durch die Bedingung, dass die gewöhnlichen algebraischen Regeln für Ableitungen gelten,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\big(F_1[\phi]+F_2[\phi]\big) &= \frac{\delta}{\delta\phi(x)}F_1[\phi]+\frac{\delta}{\delta\phi(x)}F_2[\phi], \quad \text{(Linearität)} \\ \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\big(F_1[\phi]F_2[\phi]\big) &= F_1[\phi]\frac{\delta}{\delta\phi(x)}F_2[\phi]+F_2[\phi]\frac{\delta}{\delta\phi(x)}F_1[\phi], \quad \text{(Leipniz Regel)} \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $F_i[\phi]$ Funktionale von ϕ sind, und dass zusätzlich gilt:

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\phi(x) = \delta^{(D)}(x-y). \tag{2}$$

Verifizieren Sie, dass

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\phi(y)}\int_x \phi(x)J(x) &= J(y), \\ \frac{\delta}{\delta\phi(y)}\exp\left(\int_x \phi(x)J(x)\right) &= J(y)\,\exp\left(\int_x \phi(x)J(x)\right), \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $\int_x \equiv \int d^Dx$.

Aufgabe 5: (2 Punkte)

Gegeben sei die klassische Wirkung S für ein Feld $\phi(x)$ in der Raumzeit. Mit Hilfe der Funktionalableitung lässt sich das Hamiltonsche Prinzip wie folgt formulieren:

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} = 0.$$

Zeigen Sie, dass daraus für Wirkungen von Typ $S[\phi]=\int d^Dy\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi;y)$ die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen.

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Für ein klassisches Feld $\phi(\mathbf{x},t)$ mit zugehöriger kanonisch konjugierter Impulsdichte $\pi(\mathbf{x},t)$ kann analog zur klassischen Mechanik eine Poisson-Klammer definiert werden. Seien $A[\phi,\pi]$ und $B[\phi,\pi]$ zwei allgemeine Phasenraumfunktionale, dann ist die Poisson-Klammer in $d = D-1$ räumlichen Dimensionen gegeben durch (das Zeitargument t sei im folgenden der Einfachheit halber weggelassen)

$$\{A,B\} := \int d^d z \left(\frac{\delta A}{\delta\phi(\mathbf{z})}\frac{\delta B}{\delta\pi(\mathbf{z})} - \frac{\delta A}{\delta\pi(\mathbf{z})}\frac{\delta B}{\delta\phi(\mathbf{z})} \right).$$

(a) Verifizieren Sie die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\{\phi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{y})\} = 0, \quad \{\pi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{y})\} = 0, \quad \{\phi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{y})\} = \delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Die Zeitevolution von Feld und Impulsdichte werden generiert durch die Hamilton-Funktion H vermöge der kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}) = \{\phi(\mathbf{x}),H\}, \quad \dot{\pi}(\mathbf{x}) = \{\pi(\mathbf{x}),H\}.$$

(b) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen für die Klein-Gordon-Theorie mit der Hamilton-Funktion

$$H \equiv \int d^d y\, \mathcal{H}(\mathbf{y}) = \int d^d y\, \frac{1}{2}\Big(\pi^2 + (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\Big)$$

wobei $\mathcal{H}(\mathbf{y})$ die Hamilton-Dichte ist.