Quantenfeldtheorie
FSU Jena - SS 09
Klausur

Prof. H. Gies

22 Juli, 2009

---

01 - Klassische Feldtheorie (2 + 2 + 4 P.)

Betrachten Sie die *klassische* Feldtheorie eines komplexen skalaren Feldes $\phi(x)$, welche durch folgende Wirkung beschrieben wird:

$$S[\phi,\phi^*] = \int d^4x \; \mathcal{L} = \int d^4x \; \left[(\partial_\mu \phi^*(x))(\partial^\mu \phi(x)) - \frac{\lambda}{n!}(\phi^*(x)\phi(x))^n\right]$$

wobei $n \in \mathbb{N},\; n \geq 2$.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für $\phi(x)$ mit Hilfe der Funktionalableitung auf. (Betrachten Sie dabei ϕ und ϕ^* als unabhängige Felder.)

(b) Zeigen Sie, dass die Wirkung invariant unter folgender Transformation ist:

$$\phi(x) \to e^{-i\alpha}\phi(x) \quad , \quad \phi^*(x) \to e^{i\alpha}\phi^*(x) \quad , \quad \alpha : \text{const}$$

(c) Betrachten Sie die zugehörigen infinitesimalen Transformationen $\delta\phi$ und $\delta\phi^*$ und zeigen Sie, dass

$$J^\mu = \pi^\mu \delta\phi + \pi^{*\mu}\delta\phi^* \qquad \text{mit} \qquad \pi^\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$$

ein erhaltener Strom bezüglich dieser Transformation ist (*Noether-Strom*).

02 - Symmetrien des Gross-Neveu Modells (2 + 4 P.)

Betrachten Sie eine Theorie wechselwirkender Fermionen, die durch folgende Wirkung beschrieben wird:

$$S\left[\overline{\psi},\psi\right] = \int d^4x \; \left[i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{\lambda}{2}(\overline{\psi}\psi)^2\right]$$

Zeigen Sie, dass das Model invariant ist unter diskreten chiralen Transformationen

$$\psi \to e^{i\frac{\pi}{2}\gamma_5}\psi \quad , \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi}e^{i\frac{\pi}{2}\gamma_5}$$

(a) Zeigen Sie die Invarianz des kinetischen Terms $i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ mit Hilfe der Beziehung für antikommutierende Matrizen $A, B : Ae^B = e^{-B}A$.

(b) Zeigen Sie des Weiteren mit Hilfe von $\gamma_5^2 = 1$ (d.h. $\gamma_5^3 = \gamma_5,\; \gamma_5^4 = 1$, usw.), dass $\overline{\psi}\psi \to -\overline{\psi}\psi$, so dass $(\overline{\psi}\psi)^2$ ebenfalls invariant ist.

Nebenbemerkung: Von diskreten Transformationen lassen sich *keine* infinitesimalen Versionen angeben.

03 - Propagator (2 + 6 P.)

Betrachten Sie den Dyson-Propagator (beachten Sie das Vorzeichen von $i\varepsilon$!):

$$\Delta_D(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 - m^2 - i\varepsilon} e^{-ipx}$$

(a) Verifizieren Sie, dass Δ_D eine Greensche Funktion der Klein-Gordon-Gleichung ist.

(b) Zeigen Sie mit $D = d + 1$ und $\overline{p}^\mu = (E_\mathbf{p}, \mathbf{p})$, dass gilt:

$$\Delta_D(x) = -\Theta(-x^0)\Delta^+(x) - \Theta(x^0)\Delta^-(x)$$

wobei

$$\Delta^\pm(x) = \frac{1}{i} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_\mathbf{p}} e^{\mp i\overline{p}x}$$

04 - S-Matrix, Störungstheorie und Feynmandiagramme (3 + 2 + 3 + 3 P.)

Betrachten Sie ein reelles Skalarfeld mit Wechselwirkungs-Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H}_I = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

wobei λ die Kopplungsstärke bezeichnet.

(a) Drücken Sie die S-Matrix dieser Theorie bis zur Ordnung λ mit Hilfe des Wickschen Theorems durch normalgeordnete Produkte und Wick-Kontraktionen aus.

(b) Stellen Sie die S-Matrix zur Ordnung λ durch Feynman-Diagramme dar. Wie viele Schleifen (*loops*) hat jedes dieser Diagramme?

(c) Erklären Sie folgende Begriffe zur Klassifizierung von Feynman-Diagrammen *kurz* anhand eines Beispiels. (Wenn möglich, können Sie gerne Diagramme aus (b) hierfür verwenden.)

- Was versteht man unter einem 1PI-Diagramm (*one-particle irreducible*)?
- Was versteht man unter einem amputierten Diagramm?
- Welchen Typ von Diagrammen bezeichnet man als Vakuum-Diagramme (*vacuum bubbles*)?

(d) Berechnen Sie die Streuamplitude $\mathcal{M}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \to \mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2)$ zur Ordnung λ.
Hinweis: Für $S = 1 + iT$ ist die Streuamplitude durch

$$\langle\{\mathbf{p}_f\}|\, iT \,|\{\mathbf{p}_i\}\rangle_{\substack{\text{con.}\\ \text{amp.}}} =: i(2\pi)^D \delta^{(D)}\Big(\sum_f p_f - \sum_i p_i\Big) \cdot \mathcal{M}\left(\{\mathbf{p}_i\} \to \{\mathbf{p}_f\}\right)$$

definiert.